

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம் / Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1999 අගෝස්තු කல்මිට් බොහෝම නොතරාපත්තිර(உயர் தரம்) பரீட்சை. 1999 ඉස්සන්ත General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1999					
ව්‍යවහාරික ගණිතය II பிரயோக கணிதம் II Applied Mathematics II	<table border="1" style="margin: auto;"> <tr> <td colspan="2" style="padding: 5px;">06</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">S</td> <td style="padding: 5px;">II</td> </tr> </table>	06		S	II
06					
S	II				
පැතුනයි / மூன்று மணித்தியாலம் / Three hours					

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.
 සංඛ්‍යාත වල සපයනු ලැබේ.

1. තලයක වලනය වන P අංශුවක, O මූලයක් සහ Ox ආරම්භක රේඛාව අනුබද්ධයෙන්, මූලික ඛණ්ඩාංක (r, θ) වෙයි. P හි ප්‍රවේග සහ ක්වරණ දෛශිකවල අර්ථ සහ නිර්ථක් සංරචක ප්‍රකාශ කරන්න.

දිග $2a$ වූ පැහැල්ලු අවිභ්‍යාස තන්තුවක්, සුමට නිරන්තර වේගයක් මත O ලක්ෂ්‍යයක සවිකර ඇති කුඩා සුමට මුදුවක් තුළින් යයි. තන්තුවේ දෙකෙළවරට, ස්කන්ධ පිළිවෙළින් m සහ $2m$ වූ P සහ Q ඉතා කුඩා ගෝල දෙකක් සම්බන්ධ කර ඇත. PQ තන්තුව නොවුරුණු, සරල රේඛාවක් දීර්ඝ, PQ හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය O හි පිහිටන පරිදි ගෝල දෙක මේසය මත තබා ඇත. ආරම්භයේ දී P ගෝලයට, මේසය දීර්ඝ, තන්තුවට ලම්බ V ප්‍රවේගයක් දෙනු ලැබේ. t කාලයේ දී OP හි දිග r ද, OP හැරී ඇති කෝණය θ ද වෙයි.

P අංශුවට, නිර්ථක් දිශාවට වලින නියමය යෙදීමෙන් $\frac{d\theta}{dt} = \frac{aV}{r^2}$ බව පෙන්වන්න.

සර්වසාධ සඳහා කෙසේ හෝ සංස්කරණ මූලධර්මය ලියා දක්වා $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{V^2}{3} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)$ සම්කරණය ලබා ගන්න.

ඒ නමින්, Q ගෝලය $\frac{3a}{V}$ කාලයකට පසුව O කරා උභාවිත බව පෙන්වා, මෙම මොහොතේ P හි ප්‍රවේගයේ සංරචක සොයන්න.

Q ගෝලය, O මුදුවේ රැඳෙයි නම් සහ තන්තුව නොකැඩෙයි නම්, එම මොහොතේ කන්තුවේ ආවේනි ආතති $\frac{mV}{2}$

බවත්, පසුව පිදුවන P ගෝලයේ වලිනයේ දී තන්තුවේ ආතති $\frac{mV^2}{8a}$ බවත් පෙන්වන්න.

2. කේන්ද්‍රය O සහ අරය a වූ අවල සුමට කුහර ගෝලයක ඇතුළත පහත් ම ලක්ෂ්‍යයේ ඇති P අංශුවක්, $2ga < u^2 < 5ga$ වන පරිදි වූ u වේගයෙන් නිරන්තර ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ; OP රේඛාව θ කෝණයකින් හැරී ඇතිවිට අංශුව තරම්

ගෝලයේ පෘෂ්ඨය සමඟ ස්පර්ශ වී ඇත්නම් එහි වේගය සොයන්න. නිරන්තර සමඟ $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{u^2 - 2ga}{3ga}\right)$ සුර

කෝණයක් සාදන දිශාවකට උඩු අතට වලනය වෙමින් සිටිය දී, $v = \sqrt{\frac{u^2 - 2ga}{3}}$ වේගයෙන් අංශුව ගෝලයේ පෘෂ්ඨයෙන් ඉවතට යන බව පෙන්වන්න.

ඉන් පසුව, කුහරයක යටතේ කෙරෙන නිදහස් වලිනයේ දී අංශුව, ගෝලයේ O කේන්ද්‍රය හරහා යයි නම් $\tan^2 \alpha = 2$ බවත්, $u^2 = (2 + \sqrt{3})ga$ බවත් පෙන්වන්න.

3. අංශුවක ප්‍රවේගය u සිට v දක්වා වෙනස් කරන I ආවේගයක් නිසා අංශුවේ ඇතිවන චාලක ශක්ති වෙනස $I \cdot \left(\frac{u+v}{2} \right)$ බව සාධනය කරන්න.

A සුළඹ තෝලයක් සිරස් අනුභාසාර්ය සුළඹ ගෙඩිමක නිශ්චල ව. එතෙක් චලනය වීමට නිදහස ඇතිව, තබා ඇත. A ට සර්වසම් වූ B තෝලයක් සිරස් ව පහළට u වේගයෙන් වැටෙන අතර A තෝලය සමඟ ගැටෙන්නේ, ගැටුම් මොහොතේ දී තෝලවල කේන්ද්‍ර මධ්‍යව සිරස් සමඟ α කෝණයක් සාදන පරිදි ය. තෝල දෙක අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය e වෙයි. සංවේදනය සම්බන්ධයෙන්, පහත දක්වන ප්‍රතිඵල පිහිටුවන්න:

- (i) තෝල දෙක අතර ආවේගය $\frac{(1+e)mu \cos \alpha}{1 + \sin^2 \alpha}$ වෙයි.
 (ii) පිදුවන චාලක ශක්ති හානිය $(1 - e^2) \frac{mu^2}{2} \left(\frac{\cos^2 \alpha}{1 + \sin^2 \alpha} \right)$ වෙයි.
 (iii) ගෙඩිමෙන් ඇති කරන ආවේගය $(1 + e) mu \left(\frac{\cos^2 \alpha}{1 + \sin^2 \alpha} \right)$ වෙයි.

ගෙඩිමෙන් ආවේගය නිසා චාලක ශක්ති හානියක් පිළි නොවන්නේ ඇයි?

4. ස්කන්ධය M සහ අරය a වූ ඒකාකාර වෘත්තාකාර කැටියකට, එහි කේන්ද්‍රය හරහා යන, එහි කලයට අභිලම්භ අචල සිරස් අක්ෂයක් වටා භ්‍රමණය වීමට නිදහස ඇත. ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් කැටියේ දරය මත එහි උච්චතම ලක්ෂ්‍යයේ තබනු ලැබේ. අංශුව සහ කැටිය අතර සර්ඝණ සංගුණකය μ වේ. පද්ධතිය නිශ්චලතාවයේ සිට යම්කම් විස්ථාපනය කෙරෙන අතර, t කාලයේ දී කැටිය හැරෙන කෝණය θ වේ. අංශුව සහ කැටිය අතර සාපේක්ෂ චලිතයක් නොමැතිකාන් කල්

$$(M + 2m) a \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = 4 mg (1 - \cos \theta) \quad \text{බව පෙන්වන}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} \quad \text{සඳහා ප්‍රකාශනයක් ලබා ගන්න.}$$

කැටියෙන් අංශුව මත ක්‍රියා කරන බලයෙහි ස්පර්ශක සංරචකය, $F = \frac{Mmg \sin \theta}{M + 2m}$ බව පෙන්වන එම බලයේ අර්ධ සංරචකය සොයන්න. අංශුව කැටිය සමඟ ස්පර්ශය නැතිවීමට පෙර අංශුව ලිස්සන බව අපෝහනය කර, ලිස්සීම පිදුවන විට θ හි අගය සඳහා සමීකරණයක් ලබා ගන්න.

5. ස්කන්ධය m සහ දිග $2a$ වූ ඒකාකාර AB දණ්ඩක A කෙළවර හරහා යන AB ට ලම්භ අක්ෂයක් වටා අවස්ථිති හුවණය $\frac{4ma^2}{3}$ බව පෙන්වන්න.

දණ්ඩ A කෙළවර අචල ලක්ෂ්‍යයකට විවර්තනය කර, AB සිරස් ව හිසියා දී නිශ්චලතාවයේ සිට දණ්ඩ මුදු හටුනු ලැබේ.

$$\text{එම } \theta \text{ කෝණයකින් කැටි ඇති විට } a \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{3g}{2} \sin \theta \quad \text{බව පෙන්වන්න.}$$

එම මොහොතේ දී, A හි දී ප්‍රතික්‍රියාවේ දණ්ඩ දිගේ සංරචකය සොයන්න.

AB සිරස් වන මොහොතේ දී A කෙළවර විවර්තනීයෙන් මුදු හටුනු ලැබේ. ගුරුත්වය යටතේ, දණ්ඩෙහි පසුව පිදුවන චලිතයේ දී එහි G ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයේ පථය සොයන්න.

දණ්ඩෙහි ප්‍රභව සිරස් පිහිටීම ඇති මොහොතේ සිට $\pi \sqrt{\frac{2a}{3g}}$ කාලයකට පසු AB නැවත ක්ෂණික ව සිරස් පිහිටීමකට පැමිණෙන බව ද, මෙම කාලයේ දී G චලනය වන සිරස් දුර πa බව ද පෙන්වන්න.

6. (අ) මිලදුම් කුස, වර්ණයෙන් හැර අනික් හැම ලෙසින් ම සර්වසම වූ බේල 5 ක් අඩංගු වේ. ඒවායින් දෙකක් සුදු පාට ද, තුනක් කහපාට ද වේ. සුදු බේල දෙකම ලැබෙන කුරු වර්තය එක බැගින්, සසම්භාවීව, ප්‍රතිස්ථාපන රහිත ව, මිලදුම් බේල ඉවතට ගනු ලැබේ.

X සසම්භාවී විචලනය, "සුදු බේල දෙකම ලැබීම සඳහා ඉවතට ගැනීමට අවශ්‍ය වාර ගණන" නම්, X හි සම්භාවිතා ව්‍යාප්තිය සොයන්න. X හි මධ්‍යතන අගය 4 බව පෙන්වා X හි සම්මත අපගමනය සොයන්න.

- (ආ) දුභවායෙන්, ඉලක්ක ලැල්ලක හරි මැද වෙත ඊයක් විදීමට පුරුදු වෙයි. එක් එක් උත්සාහය සඳහා ස්ථායාත්ත ව, හරි මැදට විදීමට (සාර්ථකත්වයට) ඔහුගේ සම්භාවිතාව $\frac{1}{5}$ වෙයි. ඔහුගේ ප්‍රථම සාර්ථකත්වය ලැබෙන්නේ

- (i) ඔහුගේ දෙවැනි උත්සාහයේ දී,
- (ii) ඔහුගේ තෙවැනි උත්සාහයේ දී,
- (iii) ඔහුගේ සිව්වැනි උත්සාහයේ දී

වීමේ සම්භාවිතාව, දශමස්ථාන තුනකට, සොයන්න.

"දුභවායාගේ ප්‍රථම සාර්ථක උත්සාහයක් ඇතුළුව ඒ දක්වා ඔහු කරන උත්සාහ ගණන", Y යැයි ගනිමු. Y විචලනය, සම්භාවිතා ශ්‍රිතය

$$P(Y = r) = \left(\frac{4}{5}\right)^{r-1} \left(\frac{1}{5}\right), \quad r = 1, 2, 3, 4, \dots$$

සහිත සසම්භාවී විචලනයක් බව සත්‍යාපනය කරන්න.

$(1 - q)^{-2}$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණය උපකල්පනය කරමින්, Y හි මධ්‍යතන අගය 5 බව පෙන්වන්න. දුභවායාගේ ප්‍රථම සාර්ථකත්වයට කලින් අසාර්ථක උත්සාහ අඩු වශයෙන් හතරක් වත් සිටීමේ සම්භාවිතාව, ආසන්න වශයෙන් 0.41 බවක් පෙන්වන්න.

7. E නම් කාර්යාලීය දුරකථන හුවමාරුවකට මිනිත්තුවක දී ලැබෙන ඇමතුම් ගණන, X , මධ්‍යතන μ වූ පොයිසොන් ව්‍යාප්තියක් අනුගමනය කරන අතර X හි සම්භාවිතා ශ්‍රිතය

$$P(X = r) = \frac{e^{-\mu} \mu^r}{r!}, \quad r = 0, 1, 2, 3, \dots$$

වෙයි.

පැය 10 කින් යුක්ත පැමි වැඩ කරන දිනක දී ම E වෙත සාමාන්‍යයෙන් ඇමතුම් 240 ක් ලැබෙන බව දී ඇත්නම් μ හි අගය සොයා මෙම මධ්‍යතන සඳහා පහත දක්වන ප්‍රතිඵල සිහිපුවන්න :

- (i) මිනිත්තු තුනක කාල ප්‍රාන්තරයක දී බොහෝදුරට ලැබිය හැකි ඇමතුම් සංඛ්‍යාව 1 ක් වේ.

- (ii) මිනිත්තු t කාල ප්‍රාන්තරයක දී අඩුම වශයෙන්, එක් ඇමතුමක් වත් ලැබීමේ සම්භාවිතාව $1 - e^{-\frac{2t}{3}}$ වේ.

Y සන්නිකිත සසම්භාවී විචලනයක්,

" E හුවමාරුව වෙත ලැබෙන අනුගාමී දුරකථන ඇමතුම් දෙකක් අතර කාල ප්‍රාන්තරය" වශයෙන් අර්ථ දක්වෙයි.

Y හි සමුච්චිත ව්‍යාප්ති ශ්‍රිතය ලියා දක්වන්න.

Y හි සම්භාවිතා ඝනකම ශ්‍රිතය $\frac{2}{5} e^{-\frac{2t}{5}}$ බව පෙන්වන්න.

අනුගාමී ඇමතුම් දෙකක් අතර මධ්‍යතන කාලය ගණනය කරන්න.

E හුවමාරුවේ ක්‍රියාකරුවාට ගෙවනු මිනිත්තු තුනේ දී ඇමතුම් කිසිවක් නොලැබුන බව දී ඇත්නම්, ඇමතුමක් අත් නොහැරෙන පරිදි ඊළඟ මිනිත්තු පහ සඳහා ඔහුට හුවමාරුවෙන් බැහැරව සිටිය හැකි වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

8. (අ) "ශුද්ධ බර 250 g" ලෙස ලේබල් කර ඇති ඇසුරුම් තුළට යන්ත්‍රයකින් හෝ පුරවනු ලැබේ. ඇසුරුම් 5000 ක ඇණවුමක අඩංගු හෝ වල මුළු බර 1275 kg වෙයි. හෝ ඇසුරුම් වල ශුද්ධ බර, සම්මත අපගමනය 2 g සහිත ව, ප්‍රමිත ලෙස ව්‍යාප්ත වී ඇත්නම් මෙම ඇණවුමෙහි

(i) 250 g ට අඩු බර සහිත ව අපේක්ෂිත ඇසුරුම් සංඛ්‍යාව

(ii) හරියටම 250 g බර සහිත ව අපේක්ෂිත ඇසුරුම් සංඛ්‍යාව

සොයන්න.

(ආ) බහුවරණ පරීක්ෂණ පත්‍රයක ප්‍රශ්න 50 ක් අඩංගු ය. අපේක්ෂිතයෙකු එක් එක් ප්‍රශ්නයට දී ඇති, හිඟය හැකි, පිළිතුරු තුනකින් එකක් යටින් ඉරක් ඇද තිවැරදි බව දක්වීම අවශ්‍ය ය. එක් එක් ප්‍රශ්නයට එක පිළිතුරක් පමණක් තිවැරදි වන අතර එවැනි පිළිතුරක් සඳහා අපේක්ෂිතයෙකුට එක ලකුණක් ලැබේ. මුළුමනින් ම නූතන අපේක්ෂිතයෙන් සසම්භාවී ලෙස පිළිතුරු යටින් ඉරි අදියි. X සසම්භාවී විචල්‍යය, "ඔහු විසින් තිවැරදි ව යටින් ඉරි ඇදී පිළිතුරු ගණන" ලෙස ගනිමු. X අනුගමනය කරන ද්විපද ව්‍යාප්තියෙහි මධ්‍යන්‍යය සහ විචලකාව සොයන්න.

සමත් වීමේ ලකුණ 20 වෙයි නම්, මෙම ද්විපද ව්‍යාප්තිය සඳහා ප්‍රමිත සන්නිකර්ෂණයක් යෙදීමෙන්, ඔහු මෙම පරීක්ෂණය සමත්වීමේ සම්භාවිතාව, ආසන්න වශයෙන් 0.1977 බව පෙන්වන්න.

9. නියත m ස්කන්ධයෙන් යුත් P අංශුවක් O ලක්ෂ්‍යයක සිට, සිරස් ව පහළට, U වේගයෙන් ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. එය ගුරුත්වය යටතේ චලනය වන්නේ අංශුවේ වේගය v වනවිට mkv ප්‍රතිරෝධයක් ඇති කරන මාධ්‍යයක් තුළ ය. මෙහි k නියතයකි. P අංශුවේ වේගය U කෙරෙහි ස්ථාවරත්වය සීමාවකට ළඟාවන බව පෙන්වන්න.

t කාලයක දී P අංශුව වැටෙන දුර

$$\frac{gt}{k} + \frac{1}{k} \left(U - \frac{g}{k} \right) (1 - e^{-kt})$$

බවත් පෙන්වන්න.

P හි ප්‍රක්ෂේප මෝහනයේ සිට T කාලයකට පසුව P ට සර්වසම Q අංශුවක් O ලක්ෂ්‍යයේ සිට, සිරස් ව පහළට, V වේගයෙන් ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. අවසානයේ දී ($t \rightarrow \infty$ එළඹෙන විට) අංශු දෙක අතර දුර $\frac{1}{k} (U - V + gT)$

බව පෙන්වන්න.

අවසානයේ දී Q ට සාපේක්ෂ ව P හි ප්‍රවේගය කුමක් ද?

10. F බලයක ක්‍රියා රේඛාව A ලක්ෂ්‍යයක් හරහා යන අතර, O මූලයක් අනුබද්ධයෙන් A හි පිහිටුම් දෛශිකය a වෙයි. O ලක්ෂ්‍යය වටා F බලයෙහි දෛශික ක්‍රමණය අර්ථ දක්වා, එහි විශාලත්වය සහ දිශාව පැහැදිලිව ප්‍රකාශ කරන්න.

බල පද්ධතියක් සමන්විත වන්නේ, O මූලය හරහා ක්‍රියා කරන $F_1 = 2i + j - 3k$, $F_2 = 6i + 2j + k$ සහ $F_3 = -4i + j - 2k$ බල සමූහයක් නිසා බල දෙකකිනි. ඒවා නම්, පිහිටුම් දෛශිකය $a = i - j + 2k$ වූ A ලක්ෂ්‍යය හරහා ක්‍රියා කරන, λ නියතයක් වූ, $F_4 = \lambda i + j - 2k$ බලයක් සහ පිහිටුම් දෛශිකය $b = -8i - 4k$ වූ B ලක්ෂ්‍යය හරහා ක්‍රියා කරන $F_5 = -7i - j - 2k$ බලයක් වේ. මෙහි i, j, k මගින් පිළිවෙලින් Ox, Oy, Oz සාප්‍රස්ථාපිත කාටීෂියා අක්ෂ දිශේ ඒකක දෛශික දක්වයි.

මෙම පද්ධතිය O හි දී ක්‍රියා කරන R බලයක් සමගින් ක්‍රමණය G වූ යුග්මයකට උෂ්ණය කළේ නම් R සඳහා ප්‍රකාශනයක් ලියා

$$G = -4i + (2\lambda + 14)j + (\lambda + 9)k$$

බව පෙන්වන්න.

පද්ධතිය, F හි බලයකට උෂ්ණය වන පරිදි λ හි අගය තීරණය කරන්න. එවිට F සොයා එහි ක්‍රියා රේඛාවේ දෛශික සමීකරණය μ පරාමිතියක් වූ, $r = i + j - k + \mu(i - j + 2k)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න.