සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි]
முழுப் பதிப்புரிமையுடையது]
All Rights Reserved]

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம் / Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1998 අගෝස්තු **(නව නිර්දේශය)**
கல்விப் பொதுத் தராதரப்பத்திர(உயர் தர)ப் பரீட்சை, 1998 ஆகஸ்ற் **(புதிய பாடத்திட்டம்)**
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1998 **(New Syllabus)**

ව්‍යවහාරික ගණිතය I
பிரயோக கணிதம் I
Applied Mathematics I

06	
S	I

පැය තුනයි / *மூன்று மணித்தியாலம் / Three hours*

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

අවශ්‍ය තැන්හි දී ගුරුත්වජ ත්වරණය $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ ලෙස ගන්න.

1. අංශුවක් ආරෝහකයක වහලේ වූ දුනු තරාදියක් මගින් සිරස් ලෙස එල්ලෙයි. ආරෝහකයේ උඩුකුරු චලිතය අවස්ථා තුනකින් සිදුවෙයි. මුල් අවස්ථාවේ දී ආරෝහකය $f \text{ m s}^{-2}$ නියත ත්වරණයෙන් ඉහළ නගියි; එවිට දුනු තරාදි පාඨාංකය $\left(1 + \frac{a}{g}\right)$ kg ය. දෙවැනි අවස්ථාවේ දී ආරෝහකය තත්පර t_0 පුරා $U \text{ m s}^{-1}$ නියත ප්‍රවේගයෙන් ඉහළ නගියි; එවිට දුනු තරාදි පාඨාංකය 1 kg ය. අවසාන අවස්ථාවේ දී ආරෝහකය නිශ්චලතාවයට එන තෙක් $f \text{ m s}^{-2}$ නියත මන්දනයෙන් ඉහළ නගියි; එවිට දුනු තරාදි පාඨාංකය R kg ය. මෙහි $R \geq 0$.

   (i) a හා g ඇසුරෙන් f සහ R සොයන්න.

   (ii) ආරෝහකයේ චලිතය සඳහා ප්‍රවේග-කාල වක්‍රයේ දළ රූප සටහනක් අඳින්න. ඒ නයින්

$$U = \frac{\sqrt{a^2 t_0^{\,2} + 4ah} - a t_0}{2}$$

   බව පෙන්වන්න. මෙහි h යනු මීටරවලින් ආරෝහකය ඉහළ නැගි මුළු දුරයි.

   t_0 හා h අචල නම්, $U \leq \dfrac{2h}{\left[\left(t_0^{\,2} + \frac{4h}{g}\right)^{\frac{1}{2}} + t_0\right]}$ බව අපෝහනය කරන්න.

2. යුද නැවක්, V නියත ප්‍රවේගයෙන් ඉදිරියට යාත්‍රා කරයි. හරි කෙළින් පිටුපසට එල්ල කළ කෙටි තුවක්කුවක් යුද නැවේ සවි කර ඇත්තේ, රේඩියන් θ ආරෝහණ කෝණයකිනි. තුවක්කුවට සාපේක්ෂ ව ප්‍රක්ෂේපණ ප්‍රවේගය $V\sqrt{3}$ නම්, R පරාසය,

$$R = \frac{2\sqrt{3}V^2}{g}\left(\sqrt{3}\cos\theta - 1\right)\sin\theta$$

මගින් ලැබෙන බව පෙන්වන්න.

$\theta = \frac{\pi}{6}$ විට R **උපරිමයක්** බව පෙන්වා, උපරිම පරාසය සොයන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

3. $4m$ ස්කන්ධයෙන් ද $\alpha\left(<\frac{\pi}{2}\right)$ ආනතියෙන් යුත් කුඤ්ඤයක් සුමට තිරස් මේසයක් මත තිබෙයි. පිළිවෙළින් $2m$ හා m ස්කන්ධයෙන් යුත් A හා B සුමට අංශු දෙකක් දෙකෙළවරට ඇඳූ දිග $2l$ වූ ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක්, කුඤ්ඤයේ ආනත උඩත් මුහුණතෙන් උඩුඅතට නෙරා ගිය P කුඩා සුමට නාදත්තක් වටා යයි. අංශු, කුඤ්ඤයේ මුහුණත සමග ස්පර්ශ ව තිබෙයි. ආරම්භයේ දී අංශු, එකක් අනෙකට ආසන්න ව, නාදත්තේ සිට l දුරකින් ද තන්තුවේ එක් එක් කොටස නොබුරුල් ව හා ආනත මුහුණතේ වැඩිතම බෑවුම් රේඛාව මත ද, නාදත්ත මේසයේ සිට $h(>2l\sin\alpha)$ උසකින් ද තිබෙන සේ පිහිටා ඇත. B අංශුව P නාදත්ත වෙත පැමිණීමට පෙර කුඤ්ඤයේ F ත්වරණය,

$$F = \frac{g\sin 2\alpha}{41 - \cos 2\alpha}$$

මගින් ලැබෙන බව පෙන්වන්න. ඒ නයින් F හි උපරිම අගය $\frac{g}{4\sqrt{105}}$ බව පෙන්වන්න.

F, උපරිම අගය ගත හොත් නාදත්ත වෙත ඒමට B අංශුව ගන්නා කාලය සොයන්න.

4. (අ) අචල O ලක්ෂ්‍යයක සිට d දුරකින් නිශ්චල ව තිබූ අංශුවක්, $\frac{\mu}{x^2}$ ත්වරණයකින් O දෙසට චලනය වන්නේ යැයි සිතමු. මෙහි O සිට දුර x ගෙන් නිරූපණය වෙයි. O වෙත ඒමට ගන්නා කාලය $d^{\alpha}\mu^{\beta}$ නම්, M, L හා T යන මූලික මාන යොද ගෙන α හා β සොයන්න.

(ආ) සැහැල්ලු කඹයක කෙළවරකින් 200 kg ක බරක් නිදහසේ එල්ලෙයි. කඹය එතීමෙන් නිශ්චලතාවේ සිට සිරස් ලෙස ඉහළට බර ඔසවනු ලැබෙයි. 260 g N කින් ආරම්භ වන ඇදිල්ල, එසැවෙන හැම මීටරයක් සඳහා ම 2 g N ක ශීඝ්‍රතාවයකින් **ඒකාකාර ලෙස අඩු වෙයි**. බල-අවකාශ වක්‍රයේ දළ රූප සටහනක් අඳින්න. ඒ නයින්, මීටර 40 ක් එසැවූ විට බරෙහි වේගය සොයන්න.

5. ස්වභාවික දිග l ද ප්‍රත්‍යස්ථතාව (දඩියාව) k ද වූ පරිපූර්ණ දුන්නක් සඳහා බල නියමය ප්‍රකාශ කරන්න.

ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් $4l$ දුරක පරතරයෙන් වූ බිත්ති දෙකකට ලම්බව ඝර්ෂණය රහිත සෘජු තිරස් මඟක දෝලනය වෙයි. එම අංශුව, ස්වාභාවික දිග l ද ප්‍රත්‍යස්ථතාව k ද වූ පරිපූර්ණ දුන්නක් මගින් එක් බිත්තියක වූ A ලක්ෂ්‍යයකටත් සර්වසම දුන්නකින් අනෙක් බිත්තියේ වූ B ලක්ෂ්‍යයකටත් ඈඳ තිබෙයි. එම දුනු මගින් අංශුව මාර්ගය ඔස්සේ තල්ලුවකට හා ඇදිල්ලකට ලක් කැරෙයි. t වේලාවේ දී $AP = x$ නම්,

(i) $x \leq l$ වූ විටත්

(ii) $l \leq x \leq 3l$ වූ විටත්

(iii) $3l \leq x \leq 4l$ වූ විටත්

අංශුවේ චලිත සමීකරණ ව්‍යුත්පන්න කර ඒවාට, එකම ආකාරයක් තිබෙන බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, චලිතය හැම විට ම සරල අනුවර්ත්‍ය බවත් කාලාවර්තය $2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$ බවත් පෙන්වන්න.

අංශුවට ගත හැකි උපරිම වේගය සොයන්න.

6. දෘඪ වස්තුවක් මත ක්‍රියා කරන සමාන්තර නොවන ඒකතල බල තුනක් මගින් එම වස්තුව සමතුලිතතාවේ තබයි නම් එම බල තුන ලක්ෂ්‍යයක දී හමුවන බව පෙන්වන්න.

අරය r වූ සුමට ඒකාකාර අර්ධගෝලීය පාත්‍රයක්, සුමට තිරස් මේසයක් මත නිසලව තිබෙයි. $2l$ දිගින් ද පාත්‍රයේ බරට සමාන බරින් ද යුත් සුමට ඒකාකාර දණ්ඩක් නිශ්චලතාවේ ඇත්තේ එහි කොටසක් පාත්‍රය ඇතුළේ තිබෙන පරිදි ය. සමතුලිතතා පිහිටීමේ දී, තිරසට අර්ධගෝලයේ ආධාරකයේ ආනතිය $\alpha\left(<\frac{\pi}{2}\right)$ ද පාත්‍රය ඇතුළේ වූ දණ්ඩේ කොටස මගින් කේන්ද්‍රයේ දී ආපාතනය කැරෙන කෝණය $2\beta\left(>\frac{\pi}{2}\right)$ ද වෙයි.

(i) $r = l\,\mathrm{cosec}\,\alpha\sin(\alpha+\beta)$ බවත්

(ii) $\cot\alpha = \tan 2\beta - \frac{1}{2}\sec 2\beta$ බවත්

පෙන්වන්න.

7. (අ) ඕනෑ ම ලක්ෂ්‍ය තුනක් වටා ඒකතල බල පද්ධතියක ඝූර්ණ එක එකක් ශුන්‍ය වෙයි නම්, පද්ධතිය සමතුලිතතාවේ පවතින බව අනුගමනය වෙයි ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

(ආ) ABC යනු ත්‍රිකෝණයක් යැයි ද O යනු එහි පරිකේන්ද්‍රය යැයි ද සිතමු. $B\hat{O}C=2\alpha$, $A\hat{O}C=2\beta$ සහ $A\hat{O}B=2\gamma$.

(i) $\sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma$ යන අනුපාතයෙන් වූ බල, පිළිවෙළින් BC, CA හා AB පාද ඔස්සේ, ඉංග්‍රීසි අකුරුවල පටිපාටියෙන් දක්වෙන අතට ක්‍රියා කරයි නම් බල පද්ධතිය යුග්මයකට උනනය වන බව පෙන්වන්න.

(ii) $\cos\alpha:\cos\beta:\cos\gamma$ යන අනුපාතයෙන් වූ බල, පිළිවෙළින් OA, OB හා OC ඔස්සේ, ඉංග්‍රීසි අකුරුවල පරිපාටියෙන් දක්වෙන අතට ක්‍රියා කරයි. ABC යනු සමපාද ත්‍රිකෝණයක් **ම නම් පමණක්** බල පද්ධතිය සමතුලිතතාවේ පවතින බව සාධනය කරන්න.

8. ඒකාකාර සුමට දණ්ඩක්, පිළිවෙළින් $2b\sec\alpha$, $2b$ හා $2b\sec\alpha$ දිගින් යුත් AB, BC හා CD කැබලි තුනකට කපා තිබෙයි. ඒවා B හි දී ත් C හි දී ත් සුමට ලෙස සන්ධි කර, අක්ෂය සිරස් ව ද ශීර්ෂය ඉහළින් ම ද තිබෙන අචල පරාවලයික චාපයක් මත සමමිතික ලෙස නිශ්චලතාවේ තබා ඇත්තේ කැබලි තුනම පරාවලයට ස්පර්ශක වන පරිදි ය. පරාවලයේ නාභිය, ශීර්ෂයට පහළින් $b\tan\alpha$ ගැඹුරකින් වෙයි. දණ්ඩේ ඒකක දිගක බර w නම්, CD දණ්ඩ නිසා පරාවලය මත ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියාව $2wb\tan^2\alpha$ බව පෙන්වන්න.

තවද, $\sin\alpha\tan^2\alpha-\sec\alpha=\frac{1}{2}$ බව පෙන්වන්න.

9. අරය $2r$ වූ කුහර ඒකාකාර අර්ධගෝලයක්, ආධාරකයේ C කේන්ද්‍රයේ සිට $r\sqrt{3}$ දුරක දී, එහි අක්ෂයට ලම්බ තලයක් මගින් කොටස් දෙකකට බෙදා තිබෙයි. වෘත්ත දාර දෙකක් සහිත $\mathfrak{R}$ කොටසේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය, C හි සිට $\frac{r\sqrt{3}}{2}$ දුරකින් අක්ෂය මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

අරය r ද උස h ද වූ ඒකාකාර කුහර වෘත්ත සිලින්ඩරයක එක් කෙළවරක් වසා තිබෙන අතර අනෙක් කෙළවරට, $\mathfrak{R}$ කොටසේ r අරය සහිත වෘත්ත දාරය මැලියම් යොදා අලවා බඳුනක් සාදා තිබෙයි. අර්ධගෝලය සහ සිලින්ඩරය එකම පෘෂ්ඨික ඝනත්වය ඇති ද්‍රව්‍යකින් තනා ඇතැයි උපකල්පනය කර, බඳුනේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය, සිලින්ඩරයේ සංවෘත ආධාරකයේ සිට $\frac{h^2+6r^2+4\sqrt{3}\,rh}{2h+r+4\sqrt{3}\,r}$ දුරකින් අක්ෂය මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

10. අචල ලෙස සන්ධි කළ සැහැල්ලු දඬු හතක රාමුසැකිල්ලක්, $ABCDE$ සවිධි පංචාස්‍රයකින් සහ එහි AC, AD විකර්ණවලින් සමන්විත වෙයි. රාමුසැකිල්ල, CD පහළ ම දණ්ඩ තිරස් ව පිහිටන සේ සිරස් තලයක තබා, C හි දී ත් D හි දී ත් පිළිවෙළින් P හා Q විශාලත්ව ඇති උඩුකුරු සිරස් බල දෙකකින් දරා සිටියි. පිළිවෙළින් B, A හා E ලක්ෂ්‍යවල දී 2 N, 4 N හා 2 N භාර එල්ලා ඇත. බෝ අංකනය භාවිත කර, මෙම රාමුසැකිල්ල සඳහා ප්‍රත්‍යාබල රූප සටහනක් අඳින්න.

ඒ නයින්, දඬු හතේ ප්‍රත්‍යාබල නිර්ණය කර, ඒවා ආතති ද තෙරපුම් ද යන වග දක්වන්න.

පිළිතුරු $\cos 18^\circ n$ ඇසුරෙන් දෙන්න. මෙහි n යනු ධන නිඛිලයකි.

[අනෙක් පිට බලන්න.

11. ''ඝර්ෂණ කෝණය'' හා ''ඝර්ෂණ කේතුව'' යන පද අර්ථ දක්වන්න.

(අ) ඒකාකාර දණ්ඩක්, ඝර්ෂණ සංගුණකය $\mu(<1)$ වූ රළු, අචල කුහර අර්ධගෝලයක් **ඇතුළත** සීමාකාරී සමතුලිතතාවේ නිශ්චලව තිබෙයි. දණ්ඩ, අර්ධගෝලයෙහි කේන්ද්‍රයේ දී සෘජුකෝණයක් ආපාතනය කරයි නම්, තිරසට දණ්ඩේ ආනතිය $2\tan^{-1}\mu$ බව පෙන්වන්න.

(ආ) W බරින් යුත් අංශුවක්, ඝර්ෂණ සංගුණකය μ වූ රළු ආනත තලයක් මත තබා ඇත. තලයේ බෑවුම රේඩියන් α නම්, අංශුව තලය පහළට ලිස්සා යාම වළක්වන **අඩු ම බලය** සොයන්න; මෙහි $\alpha > \tan^{-1}\mu$.

12. (අ) A හා B යනු අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාරව, **විය හැකි** සිද්ධි දෙකක් නම්, ඒවා ස්වායත්ත විය හැකි ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

(ආ) A, B හා C යනු S නියැදි අවකාශයේ වූ සිද්ධි තුනක් යැයි සිතමු. සුපුරුදු අංකනයෙන්

(i) $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$ බවත්

(ii) $P(A|C) \geq P(B|C)$ ද $P(A|C') \geq P(B|C')$ ද නම් $P(A) \geq P(B)$ බවත්

සාධනය කරන්න.

(ඇ) පෙට්ටියක නිල් වීදුරු බෝල 3 ක් සහ රතු වීදුරු බෝල 2 ක් ද තවත් පෙට්ටියක නිල් වීදුරු බෝල 2 ක් සහ රතු වීදුරු බෝල 5 ක් ද තිබෙයි. මේ පෙට්ටි අතුරෙන් එක් පෙට්ටියකින් සසම්භාවී ලෙස ගත් බෝලය, නිල් වීදුරු බෝලයක් විය. එය පළමුවැනි පෙට්ටියෙන් ලැබුණු බෝලයක් වීමේ සම්භාවිතාව කීය ද?