

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம் / Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1997 අගෝස්තු (නව නිර්දේශය)  
 கல்விய் பொதுத் தராதரப்பத்திர(உயர் தர)ப் பரீட்சை, 1997 ஆகஸ்து (புதிய பாடத்திட்டம்)  
 General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1997 (New Syllabus)

ව්‍යවහාරික ගණිතය II

பிரயோக கணிதம் II

Applied Mathematics II

4 06	
S	II

පැය තුනයි / முன்று மணி / Three hours

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

අවශ්‍ය තත්වී ඇරැඹිල් ක්වරණය,  $g = 10 \text{ m s}^{-2}$  ලෙස ගන්න.

1. වේගය තත්පරයට මීටර  $V$  වන විට, එකක ස්කන්ධයකට  $4g \left(\frac{V}{u}\right)^2 N$  ප්‍රතිරෝධයක් ක්‍රියා කරන මාධ්‍යයක  $\mu \text{ m s}^{-1}$  වේගයක් සහිතව බර අංශුවක් උඩු අතට ප්‍රක්ෂේපණය කරනු ලැබේ. අංශුව උසම ලක්ෂ්‍යයට ලඟාවන්නේ තත්පර  $\frac{\mu \tan^{-1} 2}{20}$  කාලයකට පසුව බව පෙන්වන්න.

අංශුව මුල් ප්‍රක්ෂේපණ ලක්ෂ්‍යයට නැවත පැමිණෙන විට එහි වේගය  $\frac{\mu\sqrt{5}}{5} \text{ m s}^{-1}$  බව පෙන්වන්න.

2. ළමා උසනක ක්‍රියාකාරී ඔත්විල්ලාවක් පැහැරලූ සිසිත්  $AB$  ලැල්ලකින් හා එක ම තිරය මට්ටමේ පිහිටි  $A'B'$  අවල ලක්ෂ්‍ය දෙකකට සවි කරන ලද එක එකක දිග  $l$  බැඳික් වූ, දිග තිරය, පැහැරලූ  $AA'$ ,  $BB'$  සමාන කඩ දෙකකින් සමන්විත වේ. ස්කන්ධය  $m$  වූ ළමයාගේ, ඔහුගේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය  $G$  ලැල්ල මත පිහිටන පරිදි ලැල්ලේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය මත ඉදහෙත පිටි. ලැල්ලට,  $ABB'A'$  කලයට ලම්බව තිරය  $\mu (< \sqrt{2gl})$  ප්‍රවේගයක් දෙනු ලැබේ.

- (i) ළමයා ඔත්විල්ලාවට සාපේක්ෂව එ නිසල ම ඉදහෙත පිටි.  $\theta$  කෝණ  $ABB'A'$  හි පිරිසට ආනතිය වීම කම්පේ ආනතිය  $T$ ,

$$\frac{T}{mg} = \frac{\mu^2}{2gl} + \frac{1}{2} \cos \theta - 1$$

යන්නෙන් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

- (ii) ඔත්විල්ලාව  $\theta = \alpha$  ක්ෂණික නියලකා පිහිටීමට පැමිණි විට ළමයා සමූහය වී  $ABB'A'$  කලයේ ලැල්ල මත වහාම පිට ගෙන ඉන් පසු ප්‍රමාණයන් පහෙන් වී ඔත්විල්ලාව  $\theta = 0$  තිරය පිහිටීමට ආසන්න පැමිණෙන්නේ ඉදහතේ ඉරියව්වට එයි. ඔත්විල්ලාවේ කේන්ද්‍රය වස්තුවක  $\alpha$  සිට  $\beta$  දක්වා වැඩි වන බව පෙන්වන්න; මෙහි

$$\cos \beta = \left(1 - \frac{h}{l}\right) \cos \alpha$$

වන අතර  $h$  යනු ළමයා ලැල්ල මත සිටගෙන ඉන්නා විට ලැල්ලේ සිට  $G$  ට ඇති දුර වේ.

ශ්‍රේණිය වීසින් වැය කරන ලද කේන්ද්‍රීය කොටසක් ද?

3.  $t$  වේලාවේ දී  $Oxy$  තලයෙහි  $P$  නම් අංශුවක චලිතය ඛණ්ඩාංක  $(r, \theta)$  ගැන සිතමු.  $\overline{OP}$  දිගේ වන එකක දෛශිකය  $i_r$ , ලෙසත්  $i_r$  ට ලම්බිත වැඩිවන  $\theta$  දිශාව ඔස්සේ වන එකක දෛශිකය  $i_\theta$  ලෙසත් ගත්තොත්,  $i_r, i_\theta$  හා  $\sin \theta$  ඇසුරෙන්  $i_r, i_\theta$  ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි  $i_r, i_\theta$  යනු පිළිවෙලින්  $\overline{Ox}, \overline{Oy}$  කාටීසියානු අක්ෂ ඔස්සේ වන එකක දෛශික වේ.

(i)  $\frac{dr}{dt} = \left(\frac{d\theta}{dt}\right) i_\theta$  බවත්

(ii)  $\frac{d i_\theta}{dt} = - \left(\frac{d\theta}{dt}\right) i_r$  බවත්

පෙන්වන්න.

$t$  වේලාවේ දී  $P$  හි  $V$  ප්‍රවේගය,

$$V = \left(\frac{dr}{dt}\right) i_r + \left(r \frac{d\theta}{dt}\right) i_\theta$$

මගින් දෙන බව අපෙන්වන්න.

$r = 1 + \cos \theta$  වනුයේ නිසා වේගයක් සහිතව  $P$  වලගය වෙයි නම්,  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{i}$  යනු සාදක නියතයක් බව ඔප්පු කරන්න. මෙහි  $\mathbf{a}$  යනු  $t$  වේලාවේ දී  $P$  හි ත්වරණය වේ.

4.  $A$  හා  $B$  එක එකක බර  $M$  බැගින් වූ සමාන සුමට තෝල දෙකකි.  $A$  තෝලය  $u$  ප්‍රවේගයෙන් ගොස් නිශ්චලතාවේ සිටින  $B$  තෝලය හා ගැටේ. ගැටීමේ කෙටිල ප්‍රකාශය වන අතර ගැටීමෙන් පසු  $A, B$  තෝලවල ප්‍රවේග පිළිවෙලින්  $\mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B$  වේ. රේඛීය ගම්‍යතා හා ගෝලීය සංස්පර්ශීය නියම දෛශික ආකාරයෙන් ලියා දක්වන්න. එනමින් හෝ වෙනත් ක්‍රමයකින් හෝ ගැටීමෙන් පසු  $A$  හා  $B$  ගමන් කරන මාර්ග එකිනෙකට ලම්බ වන බව පෙන්වන්න.

$A$  හා  $B$  වල ස්පන්ධ කේන්ද්‍ර රාමුව වන  $G$  හි ප්‍රවේගය  $V$  සොයන්න.

$G$  ට සාපේක්ෂව රේඛීය ගම්‍යතා හා ගෝලීය සංස්පර්ශීය නියම දෛශිකයෙන් ගැටුම නිසා තෝලවල වේග වෙනස් නොවන බව පෙන්වා  $G$  ට සාපේක්ෂව ඒවායේ පෙක්වල (ගමන් මාර්ගවල) දල සටහනක් අඳින්න.

එනමින් පසුව ඡේදයේ සඳහන් කළ ප්‍රතිඵලය ඡායාපිතව සාධනය කරන්න.

5.  $AA'$  යනු සුමට සිරස් මේසයක් මත ඇඳ ඇති අරය  $a$  හා කේන්ද්‍රය  $O$  වූ වෘත්තයක ඡායාපිතය.  $AOA' = \alpha$  රේඛීය  $2\alpha$  වේ. ස්කන්ධය  $m$  වූ ඉතා කුඩා සුමට  $P$  තෝලයක් දිග  $a$  වූ සැහැල්ලු අවකාශ තන්තුවක් මගින් අවල  $O$  කේන්ද්‍රයට සම්බන්ධ කොට ඇති අතර  $A$  හි දී නිශ්චල ව සිටියේ. ස්කන්ධය  $m$  වන ඉතා කුඩා වෙනත් සුමට  $Q$  තෝලයක් මේසය ඔස්සේ  $A'A$  දිශාවට  $u$  ප්‍රවේගයෙන්  $A'$  සිට ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ.  $P, Q$  තෝල  $A$  හි දී කෙටිල ප්‍රකාශයට ගැටුමකට භාජනය වේ. ගැටීමෙන් පසු  $P$  හා  $Q$  හි ප්‍රවේග සොයා, දෙවැනි ගැටුම  $A'$  හි දී සිදු වන්නේ

$$\pi - \alpha = 2 \cot \alpha$$

ම නම් පමණක් බව පෙන්වන්න.

එනමින් හෝ වෙනත් ක්‍රමයකින් හෝ අනතුරුව ඇති වන  $P$  හෝ  $Q$  හේ වලිකය අපෝහනය කරන්න. ඔබේ පිළිතුරට හේතු දක්වන්න.

6. ස්කන්ධය  $M$  වූ හිම ක්‍රීඩකයෙක් සුමට ව්‍යාල සිරස් හිම තහවුරක් මත සිටගෙන, නිශ්චල ව සිටී. එක එකක ස්කන්ධය  $m$  බැගින් වූ බර තෝලාකාර කුඩා බෝල දෙකක් ඔහු අත ඇත.

- (i) හිම ක්‍රීඩකයා මෙම බෝල දෙක සමභාෂීව සිරස් දිශාවකට  $u$  සාපේක්ෂ ප්‍රවේගයක් සහිතව විසි කරයි. හිම ක්‍රීඩකයා ලබා ගන්නා ප්‍රවේගයක්, ඔහු විසින් වැය කරන ලද ශක්තියක් සොයන්න.
- (ii) හිම ක්‍රීඩකයා මෙම බෝල දෙක එක් එක් අවස්ථාවේ දී  $u$  සාපේක්ෂ ප්‍රවේගයක් සහිතව එකම සිරස් දිශාවකට අනුයාත ව විසි කරයි. හිම ක්‍රීඩකයා ලබා ගන්නා ප්‍රවේගය

$$\frac{(2M + 3m) mu}{(M + 2m)(M + m)} \quad \text{බවත්}$$

ඔහු විසින් වැය කරන ලද ශක්තිය

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{2M^2 + 4Mm + m^2}{(M + m)(M + 2m)} \right] m u^2 \quad \text{බවත්}$$

පෙන්වන්න.

7.  $X$  විච්ඡිත සසම්භාවී විචලනයක ගණිත ඇවෙක්සුම  $E(X)$  සහ විචලනයට  $\text{Var}(X)$  අර්ථ දක්වන්න.

$$\text{Var}(X) = E[X(X-1)] + E(X) - [E(X)]^2$$

බව පෙන්වන්න.

$X$  විච්ඡිත සසම්භාවී විචලනයක් සියලු ධන නිඛිල අගයන් ගනු ලබන්නේ

$$P(X=x) = \frac{k2^x}{x!}$$

සම්භාවිතා ලැබෙන පරිදි ය; මෙහි  $k$  ධන නියතයකි.

$k$  හි අගය සොයා,  $E(X) = 2.3$  බව පෙන්වන්න.

එනමින්  $\text{Var}(X)$  හි අගය පසළු දෑමෙල්පානයට අපොහොසය කරන්න.

[  $e^2 = 7.4$  බව ඔබට උපකල්පනය කළ හැක. ]

8.  $X$  නම් සන්නික සසම්භාවී විචලනයක් සඳහා

(i)  $E(aX + b) = aE(X) + b$  බවත්,

(ii)  $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$  බවත්

සාධනය කරන්න; මෙහි  $a$  හා  $b$  නියත වේ.

එක්තරා ජනාකීර්ණ නගරයක දිනපතා ජල පරිභෝජනය ලීටර මිලියනවලින් දක්වෙන  $X$  නම් සසම්භාවී විචලනයක් වන අතර  $X$  හි සම්භාවිතා ක්ෂේත්‍රය  $f(x)$ ,

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-x} & ; x > 0 \text{ සඳහා} \\ 0 & ; \text{අන් විටෙහි} \end{cases}$$

මෙහි දෙනු ලැබේ; මෙහි  $k$  යනු ධන නියතයකි.

$k$  හි අගය සොයා, නගරයේ දිනපතා ජල පරිභෝජනයෙහි මධ්‍යන්‍යය ලීටර  $4 \times 10^6$  බව පෙන්වන්න.

දී ඇති දිනක නගරයේ ජල පරිභෝජනය ලීටර මිලියන කතරකට වඩා වැඩි වීමේ සම්භාවිතාව කොපමණ ද?

$X$  හි සම්මත අපගමනයද සොයන්න.

9. (a)  $X$  සසම්භාවී විචලනයක "ද්විපද ව්‍යාප්තිය  $B(np)$ " අර්ථ දක්වන්න.

(i)  $X$  ද්විපද ආකාරයට ව්‍යාප්ත වී සිටී නම්

$$\sum_{x=0}^n (x-\mu)^3 P(X=x) = n$$

සහ  $\mu$  පදවලින් ගණනය කරන්න; මෙහි  $\mu = E(X)$

(ii)  $X$  නම් ද්විපද සසම්භාවී විචලනයක මධ්‍යන්‍යය හා විචලනයට පිළිවෙලින්  $\alpha$  හා  $\beta$  ( $\neq 0$ ) වේ.

$\alpha > \beta > 0$  බව හා

$$\frac{\alpha^2}{\alpha - \beta}$$

යනු ධන නිඛිලයක් බව පෙන්වන්න.

(b) පරීක්ෂණයක සහභාගී අයෙකු සහභාගී වන ප්‍රකාශ කිරීමට අදාළ පිළිතුරු 10 කින් අඩුමවශයෙන් 6 ක් අනුමානයෙන් නිවැරදිව ලබාගත හැකි සම්භාවිතාව සොයන්න.

10.  $2a$  දිගැති  $m$  ස්කන්ධය සහිත ඒකාකාර  $AB$  දණ්ඩක  $A$  කෙළවර හරහා යන දණ්ඩට ලම්බව පිහිටන අක්ෂයක් වටා දණ්ඩේ අවස්ථිති ඝූර්ණය  $\frac{4}{3} ma^2$  බව පෙන්වන්න.

හර්ෂණ සංගුණකය ඉතා විශාල වූ ඉතා රළු සිරස් මේසයක  $A$  කෙළවර ස්පර්ශ වෙමින්  $AB$  දණ්ඩ සිරස් පිහිටීමක තිබේද ව පවතී. එය ඉතා සීරුවෙන් මෙම පිහිටීමෙන් විස්ථාපනය කරන ලදී.  $AB$  උඩු සිරස්ත් සමඟ  $\theta$  කෝණයක් සාදන විට දණ්ඩේ කෝණික ප්‍රවේගය සොයන්න.

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$  වන විට හර්ෂණ බලය එහි දිශාව වෙනස් කරන බවත්  $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$  අග්‍රිව ඉතා විශ්ව පෙර දණ්ඩ නියත වශයෙන් ම ලිස්සා යන බවත් පෙන්වන්න.

11. ආරම්භක මුළු ස්කන්ධය  $M_0$  වන රොකට්ටුවක් දියත් කෙරෙන ස්ථානයේ තිබේදිශාවෙහි සිටින අතර ස්කන්ධය  $\lambda M_0$  වන ඉන්ධන ප්‍රමාණයක් ද එයට තිබේ. මෙහි  $0 < \lambda < 1$  වේ.

ඉන්ධන දැවීම  $k$  ( $k > 0$ ) නියත සීඝ්‍රතාවයකින් සිදුවන අතර ඉන්ධනාකාරක වායු සිරස් ලෙස සහලට පිටකෙරෙන්නේ රොකට්ටුවේ සාපේක්ෂව  $u_0$  ප්‍රවේගයකිනි.

රොකට්ටුව වහා ඉහළ නගින්නේ

$$u_0 > \frac{M_0 g}{k} \text{ ම නම් පමණක්}$$

බව පෙන්වන්න.

$t$  වේලාවේ දී රොකට්ටුවේ ස්කන්ධය  $M = M(t)$  වන අතර එය  $V = V(t)$  ප්‍රවේගයකින් සිරස් ලෙස උඩු අතට ගමන් කරමින් සිටියි. වලිභයට වාතයේ ප්‍රතිරෝධයක් නොමැති බව උපකල්පනය කොට, ප්‍රථම මූලධර්ම භාවිතයෙන්

$$\frac{dV}{dt} - \frac{u_0}{M} k + g = 0$$

යන වලිභ සමීකරණය ලබාගන්න. රොකට්ටුව වහා ඉහළ නගිය නම්, එහි උපරිම වේගය සොයන්න.

12.  $Oxyz$  ත්‍රිමාන අවකාශයේ  $(x, y, z)$  ලක්ෂ්‍යයේ දී ක්‍රියාකරන බලයක්  $F = F_x i + F_y j + F_z k$  යැයි සිතමු.

මෙහි  $i, j, k$  යනු පිටිවෙලින්  $\vec{Ox}, \vec{Oy}, \vec{Oz}$  කිවිය යුතු අක්ෂ දිශේ ඒකක දෙසින් වේ.  $L_0 i + M_0 j + N_0 k$  යනු  $O$  මූලය වටා  $F$  හි දෙසින් ඝූර්ණය වෙයි නම්,  $P = (\xi, \eta, \epsilon)$  ලක්ෂ්‍යය වටා  $F$  හි දෙසින් ඝූර්ණය

$$(L_0 - \eta F_z + \epsilon F_y) i + (M_0 - \epsilon F_x + \xi F_z) j + (N_0 - \xi F_y + \eta F_x) k$$

බව පෙන්වන්න.

පිහිටවීන්  $(0, 0, \frac{1}{5})$ ,  $(\frac{1}{3}, 0, 0)$  හා  $(0, \frac{1}{4}, 0)$  ලක්ෂ්‍යවලදී ක්‍රියාකරන

$3i + 4j - 5k$ ,  $li + mj - nk$ ,  $-3i + j + k$  බල තුනකින් සද්ධකියක් සමන්විත වේ.

සද්ධකියේ  $O$  මූලයේ දී ක්‍රියා කරන

$$R_0 = 5i + 10j - 11k \text{ හා } G_0 = L_0 i + M_0 j + N_0 k \text{ යුග්මයකට}$$

උභයතා වෙයි නම්  $l, m, n, L_0, M_0, N_0$  යන මේවායේ සංබාහිමිත අගයන් සොයන්න.

සද්ධකිය  $R$  හි බලයකට උපරිතය වන බව අපහේරණය කොට  $R$  හි ක්‍රියා පේශවේ සමීකරණය සොයන්න.