සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි]
(முழுப் பதிப்புரிமையுடையது)
All Rights Reserved]

7670

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம் / Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1997 අගෝස්තු (නව නිර්දේශය)
கல்விப் பொதுத் தராதரப்பத்திர(உயர் தர)ப் பரீட்சை, 1997 ஓகஸ்ற் (புதிய பாடத்திட்டம்)
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1997 (**New Syllabus**)

ව්‍යවහාරික ගණිතය II
பிரயோக கணிதம் II
Applied Mathematics II

06	
S	II

පැය තුනයි / மூன்று மணி / *Three hours*

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

අවශ්‍ය තැන්හි ගුරුත්වජ ත්වරණය, $g = 10\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ ලෙස ගන්න.

1. වේගය තත්පරයට මීටර් V වන විට, ඒකක ස්කන්ධයකට $4g\left(\frac{V}{u}\right)^2 N$ ප්‍රතිරෝධයක් සහිත මාධ්‍යයක $u\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ වේගයක් සහිතව බර අංශුවක් උඩු අතට ප්‍රක්ෂේපණය කරනු ලැබේ. අංශුව උපරිම ලක්ෂ්‍යයට ළඟාවන්නේ තත්පර $\frac{u\tan^{-1}2}{20}$ කාලයකට පසුව බව පෙන්වන්න.
අංශුව මුල් ප්‍රක්ෂේපණ ලක්ෂ්‍යයට නැවත පැමිණෙන විට එහි වේගය $\frac{u\sqrt{5}}{5}\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ බව පෙන්වන්න.

2. ළමා උද්‍යානයක තිබෙන ඔන්චිල්ලාවක් සැහැල්ලු සිහින් AB ලෑල්ලකින් හා එක ම තිරස් මට්ටමේ පිහිටි $A'B'$ අචල ලක්ෂ්‍ය දෙකකට සවි කරන ලද එක එකක දිග l වූ, දිග සිරස්, සැහැල්ලු AA', BB' සමාන කඹ දෙකකින් සමන්විත වේ. ස්කන්ධය m වූ ළමයෙක්, ඔහුගේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය G ලෑල්ල මත පිහිටන පරිදි ලෑල්ලේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය මත ඉඳගෙන සිටී. ලෑල්ලට, $ABB'A'$ තලයට ලම්බව තිරස් $u\ (< \sqrt{2gl}\ )$ ප්‍රවේගයක් දෙනු ලැබේ.

   (i) ළමයා ඔන්චිල්ලාවට සාපේක්ෂ ව නිසල ව ඉඳගෙන සිටී. θ යනු $ABB'A'$ හි සිරසට ආනතිය විට කඹයේ ආතතිය T,

$$\frac{T}{mg} = \frac{u^2}{2gl} + \frac{3}{2}\cos\theta - 1$$

   යන්නෙන් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

   (ii) ඔන්චිල්ලාව $\theta = \alpha$ ක්ෂණික නිසලතා පිහිටීමට පැමිණි විට ළමයා සක්‍රිය වී $ABB'A'$ තලයේ ලෑල්ල මත වහාම සිට ගෙන ඉන් පසු ක්‍රමයෙන් පහත් වී ඔන්චිල්ලාව $\theta = 0$ සිරස් පිහිටීමට ආපසු පැමිණෙන්ම ඉඳගත් ඉරියව්වට එයි. ඔන්චිල්ලාවේ කෝණික විස්තාරය α සිට β දක්වා වැඩි වන බව පෙන්වන්න; මෙහි

$$\cos\beta = \left(1 - \frac{h}{l}\right)\cos\alpha$$

   වන අතර h යනු ළමයා ලෑල්ල මත සිටගෙන ඉන්නා විට ලෑල්ලේ සිට G ට ඇති දුර වේ.

   ළමයා විසින් වැය කරන ලද ශක්තිය කොපමණ ද?

[අනෙක් පිට බලන්න.

3. t වේලාවේ දී Oxy තලයෙහි P නම් අංශුවක ධ්‍රැවක ඛණ්ඩාංක (r, θ) යැයි සිතමු. $\overrightarrow{OP}$ දිගේ වන ඒකක දෛශිකය $\mathbf{i}_r$ ලෙසත් $\mathbf{i}_r$ ට ලම්බක වැඩිවන θ දිශාව ඔස්සේ වන ඒකක දෛශිකය $\mathbf{i}_\theta$ ලෙසත් ගන්න. $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \cos\theta$ හා $\sin\theta$ ඇසුරෙන් $\mathbf{i}_r, \mathbf{i}_\theta$ ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ යනු පිළිවෙලින් $\overrightarrow{Ox}$, $\overrightarrow{Oy}$ කාටීසිය අක්ෂ ඔස්සේ වන ඒකක දෛශික වේ.

(i) $\dfrac{d\mathbf{i}_r}{dt} = \left(\dfrac{d\theta}{dt}\right) \mathbf{i}_\theta$ බවත්

(ii) $\dfrac{d\mathbf{i}_\theta}{dt} = -\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right) \mathbf{i}_r$ බවත්

පෙන්වන්න.

t වේලාවේ දී P හි $\mathbf{V}$ ප්‍රවේගය,

$$\mathbf{V} = \left(\frac{dr}{dt}\right)\mathbf{i}_r + \left(r\frac{d\theta}{dt}\right)\mathbf{i}_\theta$$

මගින් දෙන බව අපෝහණය කරන්න.

$r = 1 + \cos\theta$ වක්‍රය දිගේ නියත වේගයක් සහිතව P චලනය වෙයි නම්, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}_r$ යනු සෘණ නියතයක් බව ඔප්පු කරන්න. මෙහි $\mathbf{a}$ යනු t වේලාවේ දී P හි ත්වරණය වේ.

4. A හා B එක එකක බර M බැගින් වූ සමාන සුමට ගෝල දෙකකි. A ගෝලය $\mathbf{u}$ ප්‍රවේගයෙන් ගොස් නිශ්චලතාවේ තිබෙන B ගෝලය හා ගැටේ. ගැටුම සෑවල ප්‍රත්‍යාස්ථ වන අතර ගැටුමෙන් පසු A, B ගෝලවල ප්‍රවේග පිළිවෙලින් $\mathbf{v}_A$, $\mathbf{v}_B$ වේ. රේඛීය ගම්‍යතා හා ශක්ති සංස්ථිති නියම දෛශික ආකාරයෙන් ලියා දක්වන්න. එනයින් හෝ වෙනත් ක්‍රමයකින් හෝ ගැටුමෙන් පසු A හා B ගමන් කරන මාර්ග එකිනෙකට ලම්බ වන බව පෙන්වන්න.

A හා B වල ස්කන්ධ කේන්ද්‍ර රාමුව වන G හි ප්‍රවේගය V සොයන්න.

G ට සාපේක්ෂව රේඛීය ගම්‍යතා හා ශක්ති සංස්ථිති නියම සැලකීමෙන් ගැටුම නිසා ගෝලවල වේග වෙනස් නොවන බව පෙන්වා G ට සාපේක්ෂව ඒවායේ පෙත්වල (ගමන් මාර්ගවල) දළ සටහනක් අඳින්න.
එනයින් පළමු ඡේදයේ සඳහන් කළ ප්‍රතිඵලය ජ්‍යාමිතිකව සාධනය කරන්න.

5. AA' යනු සුමට තිරස් මේසයක් මත ඇඳ ඇති අරය a හා කේන්ද්‍රය O වූ වෘත්තයක ජ්‍යායකි. AOA' = රේඩියන 2α වේ. ස්කන්ධය m වූ ඉතා කුඩා සුමට P ගෝලයක් දිග a වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගින් අචල O කේන්ද්‍රයට සම්බන්ධ කොට ඇති අතර A හි දී නිශ්චල ව තිබේ. ස්කන්ධය m වන ඉතා කුඩා වෙනත් සුමට Q ගෝලයක් මේසය ඔස්සේ $\overrightarrow{A'A}$ දිශාවට u ප්‍රවේගයෙන් A' සිට ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. P, Q ගෝල A හි දී සෑවල ප්‍රත්‍යාස්ථ ගැටුමකට භාජනය වේ. ගැටුමෙන් පසු P හා Q හි ප්‍රවේග සොයා, දෙවැනි ගැටුම A' හි දී සිදු වන්නේ

$$\pi - \alpha = 2\cot\alpha$$

ම නම් පමණක් බව පෙන්වන්න.

එනයින් හෝ වෙනත් ක්‍රමයකින් හෝ අනතුරුව ඇති වන P ගේ හා Q ගේ චලිතය අපෝහනය කරන්න. ඔබේ පිළිතුරට හේතු දක්වන්න.

6. ස්කන්ධය M වූ හිම ක්‍රීඩකයෙක් සුමට විශාල තිරස් හිම තහඩුවක් මත සිටගෙන, නිශ්චල ව සිටී. එක එකක ස්කන්ධය m බැගින් වූ බර ගෝලාකාර කුඩා බෝල දෙකක් ඔහු අත ඇත.

(i) හිම ක්‍රීඩකයා මෙම බෝල දෙක සමගාමීව තිරස් දිශාවකට u සාපේක්ෂ ප්‍රවේගයක් සහිතව විසි කරයි. හිම ක්‍රීඩකයා ලබා ගන්නා ප්‍රවේගයත්, ඔහු විසින් වැය කරන ලද ශක්තියත් සොයන්න.

(ii) හිම ක්‍රීඩකයා මෙම බෝල දෙක එක් එක් අවස්ථාවේ දී u සාපේක්ෂ ප්‍රවේගයක් සහිතව එකම තිරස් දිශාවකට අනුයාත ව විසි කරයි. හිම ක්‍රීඩකයා ලබා ගන්නා ප්‍රවේගය

$$\frac{(2M + 3m)\ mu}{(M + 2m)\ (M + m)} \quad \text{බවත්}$$

ඔහු විසින් වැය කරන ලද ශක්තිය

$$\frac{1}{2}\left[\frac{2M^2 + 4Mm + m^2}{(M + m)\ (M + 2m)}\right] m u^2 \quad \text{බවත්}$$

පෙන්වන්න.

7. X විවික්ත සසම්භාවී විචල්‍යයක ගණිත අපේක්ෂාව $E(X)$ සහ විචලතාව $Var(X)$ අර්ථ දක්වන්න.

$$Var(X) = E[X(X-1)] + E(X) - \{E(X)\}^2$$

බව පෙන්වන්න.

X විවික්ත සසම්භාවී විචල්‍යයක් සියලු ධන නිඛිල අගයන් ගනු ලබන්නේ

$$P(X = x) = \frac{k2^x}{x!}$$

සම්භාවිතා ලැබෙන පරිදි ය; මෙහි k ධන නියතයකි.

k හි අගය සොයා, $E(X) = 2 \cdot 3$ බව පෙන්වන්න.

එනයින් $Var(X)$ හි අගය පළමු දශමස්ථානයට අපෝහණය කරන්න.

[$e^2 \approx 7 \cdot 4$ බව ඔබට උපකල්පනය කළ හැක.]

8. X නම් සන්තතික සසම්භාවී විචල්‍යයක් සඳහා

(i) $E(aX + b) = a\,E(X) + b$ බවත්,

(ii) $Var(aX + b) = a^2\,Var(X)$ බවත්

සාධනය කරන්න; මෙහි a හා b නියත වේ.

එක්තරා ජනාකීර්ණ නගරයක දිනපතා ජල පරිභෝජනය ලීටර මිලියනවලින් දක්වෙන X නම් සසම්භාවී විචල්‍යයක් වන අතර X හි සම්භාවිතා ඝනත්ව ශ්‍රිතය $f(x)$,

$$f(x) = \begin{cases} ke^{\frac{-x}{4}} & ; \; x > 0 \text{ සඳහා} \\ 0 & ; \text{ අන් විටෙක} \end{cases}$$

මගින් දෙනු ලැබේ; මෙහි k යනු ධන නියතයකි.

k හි අගය සොයා ,නගරයේ දිනපතා ජල පරිභෝජනයෙහි මධ්‍යන්‍යය ලීටර 4×10^6 බව පෙන්වන්න.

දී ඇති දිනක නගරයේ ජල පරිභෝජනය ලීටර මිලියන හතරකට වඩා වැඩි වීමේ සම්භාවිතාව කොපමණ ද?

X හි සම්මත අපගමනයද සොයන්න.

9. (a) X සසම්භාවී විචල්‍යයක "ද්විපද ව්‍යාප්තිය $B(n\,p)$" අර්ථ දක්වන්න.

(i) X ද්විපද ආකාරයට ව්‍යාප්තව තිබේ නම්

$$\sum_{x=0}^{n} (x-\mu)^3 \; P(X = x)$$ n සහ μ පදවලින් ගණනය කරන්න; මෙහි $\mu = E(X)$

(ii) X නම් ද්විපද සසම්භාවී විචල්‍යයක මධ්‍යන්‍යය හා විචලතාව පිළිවෙළින් α හා β $(\neq 0)$ වේ.

$\alpha > \beta > 0$ බව හා

$\dfrac{\alpha^2}{\alpha - \beta}$ යනු ධන නිඛිලයක් බව පෙන්වන්න.

(b) පරීක්ෂණයක සත්‍යද අසත්‍යද යන්න ප්‍රකාශ කිරීමට අදළ පිළිතුරු 10 කින් අඩුමවශයෙන් 6 ක් අනුමානයෙන් නිවැරදිව ලබාගත හැකි සම්භාවිතාව සොයන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

10. $2a$ දිගැති m ස්කන්ධය සහිත ඒකාකාර AB දණ්ඩක A කෙළවර හරහා යන දණ්ඩට ලම්බව පිහිටන අක්ෂයක් වටා දණ්ඩේ අවස්ථිති ඝූර්ණය $\frac{4}{3}ma^2$ බව පෙන්වන්න.

ඝර්ෂණ සංගුණකය ඉතා විශාල වූ ඉතා රළු තිරස් මේසයක A කෙළවර ස්පර්ශ වෙමින් AB දණ්ඩ සිරස් පිහිටීමක නිශ්චල ව පවතී. එය ඉතා සීරුවෙන් මෙම පිහිටීමෙන් විස්ථාපනය කරන ලදී. AB උඩු සිරසත් සමග θ කෝණයක් සාදන විට දණ්ඩේ කෝණික ප්‍රවේගය සොයන්න.

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ වන විට ඝර්ෂණ බලය එහි දිශාව වෙනස් කරන බවත් θ, $\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ අගයට ළඟාවීමට පෙර දණ්ඩ නියත වශයෙන් ම ලිස්සා යන බවත් පෙන්වන්න.

11. ආරම්භක මුළු ස්කන්ධය M_0 වන රොකට්ටුවක් දියත් කෙරෙන ස්ථානයේ නිශ්චලතාවෙහි තිබෙන අතර ස්කන්ධය λM_0 වන ඉන්ධන ප්‍රමාණයක් ද එයට තිබේ. මෙහි $0 < \lambda < 1$ වේ.

ඉන්ධන දැවීම k $(k > 0)$ නියත සීඝ්‍රතාවයකින් සිදුවන අතර ශූන්‍යාකාරක වායු සිරස් ලෙස පහළට පිටකෙරෙන්නේ රොකට්ටුවට සාපේක්ෂව u_0 ප්‍රවේගයකිනි.

රොක්ට්ටුව වහා ඉහළ නගින්නේ

$$u_0 > \frac{M_0 g}{k} \text{ ම නම් පමණක්}$$

බව පෙන්වන්න.

t වේලාවේ දී රොකට්ටුවේ ස්කන්ධය $M = M(t)$ වන අතර එය $V = V(t)$ ප්‍රවේගයකින් සිරස් ලෙස උඩු අතට ගමන් කරමින් තිබේ. චලිතයට වාතයේ ප්‍රතිරෝධයක් නොමැති බව උපකල්පනයකොට, ප්‍රථම මූලධර්ම භාවිතයෙන්

$$\frac{dV}{dt} - \frac{u_0}{M}k + g = 0$$

යන චලිත සමීකරණය ලබාගන්න.
රොකට්ටුව වහා ඉහළ නගියි නම්, එහි උපරිම වේගය සොයන්න.

12. $Oxyz$ ත්‍රිමාන අවකාශයේ (x, y, z) ලක්ෂ්‍යයේ දී ක්‍රියාකරන බලයක් $\mathbf{F} = F_x\,\mathbf{i} + F_y\,\mathbf{j} + F_z\,\mathbf{k}$ යැයි සිතමු.
මෙහි $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ යනු පිළිවෙළින් $\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{Oz}$ කිට්සිය අක්ෂ දිගේ ඒකක දෛශික වේ.
$L_0\mathbf{i} + M_0\mathbf{j} + N_0\mathbf{k}$ යනු O මූලය වටා $\mathbf{F}$ හි දෛශික ඝූර්ණය වෙයි නම්, $P \equiv (\xi, \eta, \varepsilon)$ ලක්ෂ්‍යය වටා $\mathbf{F}$ හි දෛශික ඝූර්ණය

$$(L_0 - \eta F_z + \varepsilon F_y)\mathbf{i} + (M_0 - \varepsilon F_x + \xi F_z)\mathbf{j} + (N_0 - \xi F_y + \eta F_x)\,\mathbf{k}$$

බව පෙන්වන්න.
පිළිවෙලින් $\left(0, 0, \frac{1}{5}\right), \left(\frac{1}{3}, 0, 0\right)$ හා $\left(0, \frac{1}{4}, 0\right)$ ලක්ෂ්‍යවලදී ක්‍රියාකරන

$3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, $l\mathbf{i} + m\mathbf{j} - n\mathbf{k}$, $-3\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ බල තුනකින් පද්ධතියක් සමන්විත වේ.

පද්ධතියේ O මූලයේ දී ක්‍රියා කරන

$\mathbf{R}_0 = 5\mathbf{i} + 10\mathbf{j} - 11\mathbf{k}$ තනි බලයකට හා $\mathbf{G}_0 = L_0\mathbf{j} + M_0\mathbf{j} + N_0\mathbf{k}$ යුග්මයකට

ඌනනය වෙයි නම් l, m, n, L_0, M_0, N_0 යන මේවායේ සංඛ්‍යාත්මක අගයන් සොයන්න.

පද්ධතිය $\mathbf{R}$ තනි බලයකට ඌනනය වන බව අපෝහනය කොට $\mathbf{R}$ හි ක්‍රියා රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.