15531

සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි]
(முழுப் பதிப்புரிமையுடையது)
All Rights Reserved]

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம் / Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1995 අගෝස්තු
கல்விப் பொதுத் தராதரப்பத்திர(உயர் தர)ப் பரீட்சை, 1995 ஓகஸ்ற்
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1995

ව්‍යවහාරික ගණිතය II
பிரயோக கணிதம் II
APPLIED MATHEMATICS II

02	
S	II

පැය තුනයි / மூன்று மணி / Three hours

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

අවශ්‍ය තැන්හි ගුරුත්වජ ත්වරණය, $g = 10\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ ලෙස ගන්න.

1. (අ) Oxy – තලයේ වූ වක්‍රයක් කෙසේ ද යත් $P \equiv (x, y)$ ලක්ෂ්‍යයේ දී අභිලම්බයේ P ත් x – අක්ෂයත් අතර කොටසේ දිග, අභිලම්බයේ x – අන්තඃ ඛණ්ඩයට සමාන වන පරිදි ය. P ලක්ෂ්‍යයේ දී වක්‍රයේ අනුක්‍රමණය

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

යන්නෙන් ලැබෙන බව පෙන්වන්න. වක්‍රය, $(1, 1)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන බව දී තිබෙන විට වක්‍රයේ සමීකරණය සොයා වක්‍රයේ දළ සටහන අඳින්න.

(ආ) පැළෑටියක $h(t)$ උස t කාලය සමග පැයට $k\%$ ක ශීඝ්‍රතාවෙකින් සන්තතික ලෙස වැඩි වෙයි. පැය $100n$ ක දී උස දෙගුණයක් වෙයි නම්

$$k = \frac{1}{n} \log_e 2$$

බව පෙන්වන්න.

2. වෑන් රථයක්, A නගරයේ සිට B නගරය වෙත සෘජු ප්‍රධාන මාර්ගයක් ඔස්සේ ගමන් කරයි. $t = 0$ වේලාවේ දී A හි සිට නිශ්චලතාවෙන් ගමන් අරඹන වෑන් රථය, එහි $2u$ උපරිම වේගය ලබා ගැනීමට f නියත ත්වරණයෙන් චලනය වෙයි. $t = \frac{u}{2f}$ විට වෑන් රථය A ත් B ත් අතර වූ C හි දී රථවාහන පොලිස් රථයක් පසු කරයි. ඒ සාම වෑන් රථය දකින පොලිස් රියැදුරා, තවත් $\frac{u}{2f}$ වේලාවකට පසු C හි සිට නිශ්චලතාවෙන් ගමන් අරඹා හැකි ඉක්මනින් වෑන් රථය අල්ලා ගැනීම පිණිස $2f$ නියත ත්වරණයෙන් පොලිස් රථය පදවයි. $t_0\ (> 0)$ කාලයක් පුරා එහි උපරිම වේගය පවත්වා ගැනීමෙන් පසු වෑන් රථය, B හි දී නිශ්චලතාවට එළඹෙන්නේ $2f$ නියත මන්දනයක් යටතේ ය. වෑන් රථය පසු කරන තෙක් ම පවත්වා ගනු ලබන පොලිස් රථයේ උපරිම වේගය $3u$ නම්, වෑන් රථයේත් පොලිස් රථයේත් චලිතය සඳහා ප්‍රවේග කාල වක්‍ර එකම රූප සටහනක අඳින්න. ඒ නයින්, $t_0 \geq \frac{9u}{8f}$ නම් ඒවායේ උපරිම වේග තිබෙන **අතරතුර දී** පොලිස් රථයට වෑන් රථය පසු කර යාමට හැකි බව පෙන්වන්න.

$t_0 < \frac{9u}{8f}$ නම් ද, $0 < t_1 < \frac{u}{f}$ වන සේ $t = \frac{2u}{f} + t_0 + t_1$ විට පොලිස් රථය වෑන් රථය පසු කරයි නම් ද

$$t_1 = \left(\frac{11u^2 - 8fut_0}{8f^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{u}{2f}$$

බව පෙන්වන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

3. ගුරුත්වයට ලක් වූ අංශුවක්, පොළොවේ O නම් ලක්ෂ්‍යයේ සිට V ප්‍රවේගයක් ඇති ව තිරසට α කෝණයෙකින් ප්‍රක්ෂේපණය කැරෙන්නේ ඒකක ස්කන්ධයට ප්‍රවේගයේ $-k$ ගුණයට සමාන ප්‍රතිරෝධයක් සහිත මාධ්‍යයක් තුළ ය; මෙහි $k > 0$ වේ. t වේලාවේ දී අංශුව, y උසකින් වෙයි නම්,

$$\frac{dq}{dt} + kq = -g$$

යන චලිතයේ සමීකරණය ලබා ගන්න; මෙහි $q = \frac{dy}{dt}$.

$$y = \left(\frac{g}{k^2} + \frac{V \sin\alpha}{k}\right)\left(1 - e^{-kt}\right) - \frac{gt}{k}$$

බව ද පෙන්වන්න.

අංශුව t_0 වේලාවේ දී එහි උපරිම උසට එළඹෙන්නේ යැයි ද පියාසර කාලය T යැයි ද සිතමු. එවිට,

$$\frac{kT}{1 - e^{-kT}} = e^{kt_0}$$

බව පෙන්වා, $T > 2t_0$ බව අපෝහනය කරන්න.

4. (අ) $2d$ දුරක පරතරයකින් පිහිටි සමාන්තර ඉවුරු සහිත ගඟක ජලය ඉවුරුවලට සමාන්තර ව ගලා බසියි. ඉවුරු අයිනේ දියපාරේ වේගය ශූන්‍ය වන අතර ගඟ මැදට යත් ම වේගය u වන තෙක් ඒකාකාර ලෙස වැඩි වෙයි. ජලයට සාපේක්ෂ ව පිහිනුම්කරුවකුගේ වේගය $2u$ ය. ඉවුරුවලට ලම්බ රේඛාවක් ඔස්සේ හරියට එක එල්ලේ ම ගඟ තරණය කරන පරිදි ඔහු පිහිනා යයි. පිහිනුම්කරු ඔහුට ආසන්න ඉවුරේ සිට x දුරකින් සිටින විට දියපාරේ ප්‍රවේගය සොයන්න. ප්‍රවේග ත්‍රිකෝණය ද අඳින්න.

ඒ නයින්,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{u^2}{d^2}\left(4d^2 - x^2\right)$$

බව පෙන්වන්න. මෙම අවකල සමීකරණය අනුකලනය කර, පිහිනුම්කරු

$$\frac{\pi d}{3u}$$

කාලයේ දී ගඟ තරණය කරන බව අපෝහනය කරන්න.

(ආ) 0·6 m විෂ්කම්භයෙන් යුත් රෝදයක් තත්පරයකට රේඩියන් 0·7 ක ඒකාකාර කෝණික ප්‍රවේගයෙන් තිරස් පොළොව දිගේ පෙරළෙයි. ඕනෑ ම වේලාවක දී රෝදයේ තිරස් විෂ්කම්භයේ අන්තවල පිහිටි ලක්ෂ්‍යවල ප්‍රවේග ප්‍රලම්බ බව පෙන්වා එම ප්‍රවේගවල විශාලත්ව සොයන්න.

5. M ස්කන්ධයෙන් ද h උසින් ද $\alpha \left(< \frac{\pi}{2}\right)$ ආනතියෙන් ද යුත් කුඤ්ඤයකට, ආරෝහකයක (ඔසොවනක) විශාල සුමට තිරස් බිමක් මත, එහි දරයට ලම්බ දිශාවක් ඔස්සේ චලනය වීමට නිදහස ඇත. ආරෝහකය a නියත ත්වරණයෙන් ඉහළ නගියි. $kM\ (k \geq 1)$ ස්කන්ධයෙන් යුත් අංශුවක්, කුඤ්ඤයේ පහළ දරයෙන් ආරම්භ කර එහි මුහුණත දිගේ ඉහළට ප්‍රක්ෂේපණය කැරෙන්නේ V ප්‍රවේගයෙනි. අංශුවේ චලිතය සිදුවන්නේ කුඤ්ඤයේ ආනත මුහුණතේ වැඩිතම බෑවුම් රේඛාව ඔස්සේ යැයි උපකල්පනය කරමින්, ඕනෑ ම වේලාවක දී කුඤ්ඤයත් අංශුවත් අතර R ප්‍රතික්‍රියාව

$$R = \frac{kM(g + a)\cos\alpha}{1 + k\sin^2\alpha}$$

යන්නෙන් ලැබෙන බව පෙන්වන්න.

$$V > \left[\frac{2(1 + k)(g + a)h}{1 + k\sin^2\alpha}\right]^{\frac{1}{2}}$$

නම් අංශුව ප්‍රක්ෂේපණ ලක්ෂ්‍යයට ආපසු පැමිණෙන්නේ නැති බව සාධනය කරන්න.
ඕනෑ ම වේලාවක දී, කුඤ්ඤයත්, ආරෝහකයේ බිමත් අතර ප්‍රතික්‍රියාව කිමෙක් ද?

6. යතුරු පැදියක් H kW නියත ශීඝ්‍රතාවෙකින් කාර්ය කරයි. පදවන්නාට, සමතල බිමේ 20 m s^{-1} කින් ද තිරස සමග $\frac{\pi}{6}$ කෝණයක් සාදන කන්දක් ඉහළට 10 m s^{-1} කින් ද එම කන්ද පහළට 50 m s^{-1} කින් ද යතුරු පැදිය පදවන්නට පුළුවන. පදවන්නාගේත් යතුරු පැදියේත් මුළු ස්කන්ධය $2M$ kg ය. යතුරු පැදියේ වේගය $u \text{ m s}^{-1}$ විට චලිතයට ප්‍රතිරෝධයේ විශාලත්වය, $R = a + bu + cu^2$ kg wt යන්නෙන් දෙනු ලැබෙයි; මෙහි a, b, c යනු නියතයි.

$a = \frac{51H - 7M}{3\,\bullet}$, $b = \frac{3M - 16H}{20}$ සහ $c = \frac{6H - M}{600}$ බව පෙන්වන්න.

$H \geq \frac{5(\sqrt{2} - 1)}{12} M$ බව අපෝහනය කරන්න.

7. අංශුවක් u ප්‍රවේගයෙන් තිරසට α ආනතියක් ඇති තලයක් මත වූ O ලක්ෂ්‍යයෙකින් ප්‍රක්ෂේපණය කැරෙයි; ප්‍රක්ෂේපණ දිශාව වැඩිතම බෑවුම් උඩු රේඛාව සමග β කෝණයක් සාදයි. මෙහි $0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$. චලිතය සිදුවන්නේ ගුරුත්වය යටතේ වැඩිතම බෑවුම් රේඛාව සහිත සිරස් තලයක ය. අංශුවේ පළමු වැනි ගැටුම තලයට අභිලම්බ ලෙස, O සිට d දුරකින් වූ P ලක්ෂ්‍යයෙක දී සිදුවෙයි. නම්,

(i) $\beta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\cot\alpha\right)$ බවත් (ii) $d = \frac{2u^2}{g} \frac{\sin\alpha}{1 + 3\sin^2\alpha}$ බවත්

පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, දී තිබෙන $|u|$ අගයක් සඳහා d හි විශාලතම අගය $\frac{u^2}{g\sqrt{3}}$ බවත්, $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ විට එම අගය ලැබෙන බවත් පෙන්වන්න.

තවද $PQ = e^2 d$ වන පරිදි P ත් O ත් අතර පිහිටි Q ලක්ෂ්‍යයෙක දී දෙවැනි ගැටුම සිදු වන බවත් මෙම ගැටුමට මොහොතකට පෙර අංශුවේ ප්‍රවේගය O හි මුල් ප්‍රක්ෂේපණ දිශාවට සමාන්තර ව eu බවත් පෙන්වන්න. මෙහි e යනු ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය යි.

8. $\mathbf{I}$ ආවේගයක් හේතු කොට ගෙන ප්‍රවේගය $\mathbf{u}$ සිට $\mathbf{v}$ තෙක් වෙනස් වන අංශුවක චාලක ශක්ති විපර්යාසය සඳහා $\frac{1}{2}\mathbf{I} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v})$ ප්‍රකාශනය ලබා ගන්න.

එක එකක් M ස්කන්ධයෙන් ද a අරයෙන් ද යුත් සමාන ගෝල දෙකක්, එක එකෙක දිග l වූ සමාන, සිරස්, අවිතන්‍ය තන්තු දෙකක් මගින්, එකම තිරස් මට්ටමේ වූ ද $2a$ දුරක පරතරයකින් වූ ද A, B අචල ලක්ෂ්‍ය දෙකකින් එල්ලා ඇත්තේ ගෝල දෙක ස්පර්ශ වෙමින් ඒවායේ කේන්ද්‍ර එකම මට්ටමේ පිහිටන පරිදි ය.

ස්කන්ධය $m\ (< 2M)$ ද අරය $(\sqrt{2} - 1)a$ ද වූ කුඩා ගෝලයක් එහි කේන්ද්‍රය AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටන පරිදි රඳවා නිශ්චලතාවේ සිට සෙමින් මුද හරිනු ලැබෙයි. එය, අනෙක් ගෝල දෙකේ සමගාමී ලෙස වදින්නේ ගැටෙන මොහොතේ දී ගෝල තුනේ කේන්ද්‍ර, සිරස් තලයක වූ සෘජුකෝණී සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයක ශීර්ෂවල පිහිටන පරිදි ය. M ස්කන්ධයෙන් යුත් එක් එක් ගෝලයට ලැබෙන ප්‍රවේගය

$$\frac{mu\,(1 + e)}{2M + m}$$

බව පෙන්වන්න. මෙහි $u = \sqrt{2gl}$ ද e යනු ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය ද වෙයි.

එක් එක් තන්තුවේ ආවේගී ආතතිය J නම්, ගැටුම නිසා සිදුවන චාලක ශක්ති හානිය

$$Ju\,(1 - e)$$

බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, m ස්කන්ධයෙන් යුත් අංශුව ගැටුමේ දී ක්ෂණික වශයෙන් නිශ්චලතාවට පැමිණෙයි නම් පද්ධතියේ චාලක ශක්ති හානිය

$$mgl\left(1 - \frac{m}{2M}\right)$$

බව පෙන්වන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

9. සුමට අචල කප්පියක් උඩින් යන ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් ස්කන්ධය M වූ බාල්දියක් එල්ලා තිබෙයි. තන්තුවේ අනෙක් කෙළවරේ සමාන M ස්කන්ධයෙන් යුත් ප්‍රතිතෝලකයක් දරා සිටියි. ස්කන්ධය m වූ විදුරු බෝලයක් u ප්‍රවේගයෙන් බාල්දියේ පැතලි පතුලේ ගැටෙන පරිදි සිරස් ලෙස හෙළනු ලැබෙයි. විදුරු බෝලයත් බාල්දියත් අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය e නම් පළමුවැනි ගැටුමත් දෙවැනි ගැටුමත් අතර ගෙවී යන කාලය සොයන්න.

තවද, පළමුවැනි ගැටුමේ සිට

$$T = \frac{2eu}{(1-e)g}$$

මුළු කාලයකට පසු ගැටුම් සියල්ලම නවතින බවත් T කාල ප්‍රාන්තරය තුළ දී ප්‍රතිතෝලකය කප්පියට ළඟා නොවන්නේ නම් මේ කාල ප්‍රාන්තරය තුළ ප්‍රතිතෝලකයේ මධ්‍යක වේගය $\frac{mu}{2M+m}$ බවත් පෙන්වන්න.

10. ස්වාභාවික දිග l ද, ප්‍රත්‍යාස්ථතා සංගුණකය mg ද වූ ලුහු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක එක් කෙළවරක් O අචල ලක්ෂ්‍යයකටත් අනෙක් කෙළවර ස්කන්ධය m වූ අංශුවකටත් ඈඳා තිබෙයි. අංශුව, $t = 0$ වේලාවේ දී O හි සිට $\sqrt{(n^2+2)gl}$ ප්‍රවේගයකින් සිරස් ලෙස උඩු අතට ප්‍රක්ෂේපණය කැරෙයි; මෙහි n යනු ධන නියතයකි. kl යනු අංශුව ළඟා වන උපරිම උස ද k යනු 1 ට වැඩි නියතයක් ද විට

(i) $0 \le y \le l$ ද,

(ii) $l < y \le kl$ ද

යන අවස්ථා වෙන් කොට දක්වමින්, අංශුව සඳහා O ට ඉහළින් අංශුවේ $y(t)$ උස ඇතුළත් චලිතයේ සමීකරණය, අවකල සමීකරණයක් ලෙස ලියා දක්වන්න.

ඉහත (ii) අවස්ථාවේ දී,

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \text{ ද } \quad t \ge t_0 \text{ ද විට } \quad y(t) = A \cos \omega (t - t_0) + B \sin \omega (t - t_0)$$

යන්නෙන් ඉහත අවකල සමීකරණය සපුරාලන බව සත්‍යාපනය කර A හා B නියත සොයන්න.

අංශුව, $\left[\sqrt{n^2+2} - n + \tan^{-1} n\right]\sqrt{\frac{L}{g}}$ වේලාවකට පසු පහළ බැසීමට පටන් ගන්නා බව පෙන්වා k හි අගය සොයන්න.

11. a දිගැති සැහැල්ලු දණ්ඩකට, අචල A කෙළවරක් වටා නිදහස් ලෙස හැරෙන්නට හැකිය. එහි අනෙක් B කෙළවරට m බරැති අංශුවක් ගැට ගසා ඇත. B කෙළවර a දිගින් යුත් අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගින් A හරහා යන අචල, සුමට, තිරස් කම්බියක සර්පණය විය හැකි m බරැති කුඩා C මුද්දකට යා කර තිබෙයි. ආරම්භයේ දී A, B, C ඒකරේඛීය වන අතර AC හි දිග $2a$ වෙයි. පද්ධතිය නිශ්චලතාවේ සිට මුදා හරිනු ලැබෙයි. t වේලාවේ දී $C\hat{A}B = \theta$ නම්

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{a}\,\frac{\sin\theta}{1 + 4\sin^2\theta}$$

බව පෙන්වන්න.

තන්තුවේ T ආතතිය, θ හි ශ්‍රිතයක් ලෙස සොයා, දණ්ඩේ ආතතියට තන්තුවේ ආතතියේ අනුපාතය 3:2 බව පෙන්වන්න.

12. සමාන්තර අක්ෂ ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කරන්න.

පාදයක් $2a$ දිග සමපාද ත්‍රිකෝණයක හැඩයෙන් යුත් m ස්කන්ධය ඇති ඒකාකාර ආස්තරයක එක් දරයක් වටා අවස්ථිති ඝූර්ණය $\frac{1}{2}ma^2$ බව දී තිබෙයි. ප්‍රතිවිරුද්ධ මුල්ල හරහා යන සමාන්තර අක්ෂයක් වටා ආස්තරයේ අවස්ථිති ඝූර්ණය සොයන්න.

ස්කන්ධය M ද පාදයක් $2a$ ද වූ ඒකාකාර සවිධි ෂඩස්‍ර ආස්තරයක එක් දරයක් වටා අවස්ථිති ඝූර්ණය $\frac{23}{6}Ma^2$ බව අපෝහනය කරන්න.

දරයක් සමග සම්පාත වන තිරස් අක්ෂයක් වටා භ්‍රමණය වීමට නිදහස ඇති ෂඩස්‍ර ආස්තරය තලය සිරස් ව තිබෙන සේ නිශ්චලතාවේ එල්ලෙයි. ආස්තරයේ තලයට ලම්බ ව u වේගයෙන් චලනය වන λM ස්කන්ධයෙන් යුත් උණ්ඩයක් ආස්තරයේ කේන්ද්‍රයේ වැදී එයට කා වදියි. ක්ෂණික ව උණ්ඩයේ වේගය $\frac{u}{3}$ ට උනනය වෙයි නම්, $\lambda = \frac{23}{36}$ බවත් පද්ධතියෙහි රඳවාගන්නේ අංශුවේ චාලක ශක්තියෙන් තුනෙන් එකක් පමණක් බවත් පෙන්වන්න.