

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1994 අගෝස්තු
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1994

ව්‍යවහාරික ගණිතය II
Applied Mathematics II

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

අවශ්‍ය තත්වී ගුරුත්වජ ත්වරණය, $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ ලෙස ගන්න.

1. (අ) $\frac{dy}{dx} + xy = y^3x$ අවකල සමීකරණයේ විඳුම $y^2 e^{x^2} = c(y^2 - 1)$ ආකාරයෙන් ලබා ගන්න. මෙහි c යනු නියතයකි.

(ආ) Γ තල වක්‍රයක ඕනෑම $P = (x, y)$ ලක්ෂ්‍යයක දී අනුක්‍රමණය, P ලක්ෂ්‍යයට O මූල ලක්ෂ්‍යය යා කැරෙන රේඛාවේ බැඳුම් එකකින් ඉස්මටයි. Γ වක්‍රය $(-1, 0)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යයි නම්,

$$e^y = |x|^c$$

බව පෙන්වන්න.

2. අංශුවක්, දුඤු කරැයක් මගින් ආරෝහණයක (මධ්‍යස්ථවික) පියර්සයන් සිරස් ලෙස රළුලා තිබෙයි. ආරෝහණයේ උඩුකුරු වලිකය අවස්ථා ඉහතින් සිදුවෙයි. පළමු වැනි අවස්ථාවේ දී ආරෝහණය හිඳවල සිට නියත ත්වරණයෙන් ඉහළ නගියි; එවිට දුඤු කරැය සාධාරණය $(1 + \frac{a}{g}) \text{ kg}$ කි. දෙ වැනි අවස්ථාවේ දී කක්ෂර t_0 පුරා ආරෝහණය ඉහළ නගින්නේ $V \text{ m s}^{-1}$ නියත ප්‍රවේගයෙනි; එවිට දුඤු කරැය 1 kg කි. අවසාන අවස්ථාවේ දී නිශ්චලතාවට එන තෙක් ආරෝහණය නියත මන්දනයෙන් ඉහළ නගියි; එවිට දුඤු කරැය $(1 - \frac{a}{g}) \text{ kg}$ කි. මෙහි $0 < a \leq g$. එම ගමනේ දී ආරෝහණය ඉහළ නැගී මුළු දුර මීටර h ද ගන්නා ලද මුළු කාලය කක්ෂර T ද නම්, එක් එක් අවස්ථාවේ දී ආරෝහණයේ ත්වරණය සොයන්න.

(i) ආරෝහණයේ වලිකය සඳහා ත්වරණ-කාල වක්‍රය ඇඳ

$$t_0 = T - \frac{2V}{a}$$

බව අපෝහනය කරන්න.

(ii) ආරෝහණයේ වලිකය සඳහා ප්‍රවේග-කාල වක්‍රය ඇඳ, ඒ නගිත්,

$$V^2 - aTV + ah = 0.$$

බව පෙන්වන්න.

$$T \geq 2 \sqrt{\frac{h}{g}}$$

බව අපෝහනය කරන්න.

3. OPQ සරල රේඛාවක් සිදුවන V වේගයෙන් චලනය වන අංශුවක් t වේලාවේ දී ඒකක ස්කන්ධයට kV^{n+2} ($n > 0$) ප්‍රතිරෝධයකට භාජනය වෙයි. මෙහි k යනු ධන නියතයක් වන අතර අංශුව මත වෙනත් බල ක්‍රියා නොකරයි. ආරම්භයේ දී, අංශුව O හි සිට u වේගයෙන් ගමන් අරඹයි. t කාලයකට පසු O සිට අංශුවට දුර x ය.

(i) $\frac{dx}{dt} = \frac{u}{(1 + knx u^n)^{\frac{1}{n}}}$ බවත්

(ii) $(1 + knx u^n)^{\frac{1}{n}} = [1 + k(n+1)t u^{n+1}]^{\frac{1}{n+1}}$ බවත්
සාධනය කරන්න.

අංශුව, P සිට Q තෙක් ගමන් කරන විට එහි වේගය W සිට αW ($\alpha > 0$) තෙක් අඩු වෙයි නම්, P සිට Q තෙක් ගමන් කළ දුර අංශුවේ මධ්‍යස්ථ වේගය

$$\alpha W \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(\frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha^{n+1}}\right)$$

බව පෙන්වන්න.

4. (අ) $v \text{ km h}^{-1}$ සිත් යාත්‍රා කරන P බේරිට්ටුවක් A වරායෙන් පිටත් වන්නේ, A ට $d \csc \alpha \text{ km}$ නැගෙනහිරින් වූ B වරායෙන් පිටත් වන Q බේරිට්ටුවේ සිට $d \text{ km}$ ක පරතයක් තුළට පිවිසෙන පරිද්දෙනි. Q බේරිට්ටුව $u (< v) \text{ km h}^{-1}$ සිත් දකුණේ දෙසට යාත්‍රා කරයි. පරතය තුළට පිවිසීම සඳහා P බේරිට්ටුව ගමන් කළ දුර අන්තය දිගු දෙක අතර අන්තය 2α බව පෙන්වන්න.

- (ආ) A හා B යනු $|AB| = a$ වන පරිදි කලයක චලනය වන අංශු දෙකකි. මෙහි a යනු නියතයකි. ඕනෑම මොහොතක දී A වෙත B වෙත ප්‍රවේග පිළිවෙළින් \overline{AB} සමඟ වාමාවර්ත අතට $\frac{\pi}{6}$ හා $\frac{\pi}{3}$ කෝණ සාදන දිශාවලට වෙයි. AB රේඛාවේ අන්තය වේගය $\frac{u}{a}$ නම් ඕනෑම මොහොතක දී A හා B අංශු දෙදෙනා වේග සොයන්න.

5. 60 km h^{-1} ක ඒකාකාර ප්‍රවේගයකින් සිටින දෙක චලනය වන ට්‍රැක් රථයකින් වෙලිලයක් ඇද ගෙන යයි. වෙලිලයේ රථ සෘජුකෝණයකට පත්වන තුරු කාලයක් තිස්විටත් කඩා ඇත්තේ වෙලිලයේ ඉදිරිපස දාරයට මීටර 9 ක් දුරකිනි. $t = 0$ වේලාවේ දී ආරම්භ කර ට්‍රැක් රථයට ඒකාකාර මන්දනයක් දෙන ලබන්නේ මීටර d දුරක දී ට්‍රැක් රථය නවතින පරිද්දෙනි. භාරය, වෙලිලයට සාපේක්ෂව චලනය වීමට පටන් ගනියි නම්,

$$\mu < \frac{125}{9d}$$

බව පෙන්වන්න. මෙහි μ යනු භාරයක් වෙලිලයේ පසලක් අතර ක්ෂණික සංග්‍රහණය යි.

$d = 25$ ද $\mu = 0.4$ ද නම් භාරය කක්පර $\frac{25 - \sqrt{13}}{6}$ ක කාලයක දී $\frac{2\sqrt{13}}{3} \text{ m s}^{-1}$ ප්‍රවේගයෙන් වෙලිලයේ ඉදිරිපස දාරය වෙත ගොඩ වන බව පෙන්වන්න.

6. V ප්‍රවේගයෙන් ගමන් කරන m ස්කන්ධයෙන් යුත් අංශුවක්, චලිතයට ප්‍රසිද්ධ දිශාවට වූ විචලන බලයකින් නිශ්චලතාවට ගෙන එමේ දී කැරෙන කාර්යය $\frac{1}{2} mV^2$ බව පෙන්වන්න.

$t = 0$ වේලාවේ දී නිශ්චලතාවෙන් ආරම්භ කරන g බරින් යුත් සෙල්ලම් රථයක් සුමට සිරස් බිමක ගමන් කරයි. t වේලාවේ දී රථය මත F ප්‍රකර්ණ බලය,

$$F = (10 + 19x - 2x^2) g$$

යන්ත්‍රණ ලැබෙයි. මෙහි x යනු t කාලයේ දී රථය ගමන් කළ දුර ද $0 \leq x \leq 12$ ද වෙයි.

- (i) $0 \leq x \leq \frac{19}{4}$ වන විට ද පමණක් රථය මත F ප්‍රකර්ණ බලය වැඩිවන බව පෙන්වන්න.
(ii) $0 \leq x \leq 12$ විට බලය-දුර වක්‍රය ඇඳ, ඒ නඩත් හෝ අන් අයුරකින් හෝ රථයේ උපරිම වේගය

$$10\sqrt{\frac{23g}{3}}$$

බව පෙන්වන්න.

- (iii) සෙල්ලම් රථයේ වේගය උපරිම වීම එහි එනම් ක්‍රියා කරන ස්ථය සොයන්න.

7. පොළොවෙන් ඉහළ h උසක නිසලව ඇති m ස්කන්ධයෙන් යුත් අංශුවක් සතු ශක්තිය සොයන්න.

නොනිශ්චය තැනි උසකින් යුත් 20 kg බර ළමයෙක්, නිරතව රේඩියන් $\frac{\pi}{3}$ ක ආතතියක් සහිත සෘජු

පොල් ගසක මුදුනට ගැනීමේ දී ගුරුත්වයට එරෙහිව කැරෙන කාර්යය $2\sqrt{3}$ kJ ය. පොල් ගසේ උස සොයන්න.

ගස මුදුනේ පිටික ළමයා පොල් ගෙඩියක් කඩා එහි පිට $V \text{ ms}^{-1}$ වේගයෙන් නිරත සමඟ α ආරෝමණ

කෝණයකින් ගෙඩිය විසිකරන්නේ එය පොල් ගස මුලට වැටෙන පරිදි ය.

$$\cos \alpha \sin(\alpha + 60) = \frac{25}{V^2}$$

බව පෙන්වන

$$V \geq 10(2 - \sqrt{3})^{\frac{1}{2}}$$

බව අපේක්ෂා කරන්න.

8. u ප්‍රවේගයකින් චලනය වන පුම්බ බේරුයක්, අචල පුම්බ කලයක් සමඟ θ කෝණයක් සාදන දිශාවක් ඔස්සේ කලයේ ගැටී, පිටි අතට අභිලම්බය සමඟ ϕ කෝණයක් සාදමින් V ප්‍රවේගයෙන් පොළො පතිව.

$$\cot \theta \cot \phi = e$$

බව පෙන්වන්න. මෙහි e යනු බේරුයක් කලයක් අතර ප්‍රත්‍යාහනි සංගුණකය යි.

A, B, C, D යනු පුම්බ, නිරය, පුම්බේ රහිත සෘජුකෝණාස්‍රාකාර කිරීටයේ මේසයක කෙත් හතරයි. එම මේසයේ දර හතර පුම්බ පිරස් ගැටියකින් වටකොට ඇත. පුම්බ කිරීටයේ බේරුයක් $t = 0$ වේලාවේ දී AB හි P මත ලක්ෂ්‍යයේ පිට AB සමඟ α කෝණයක් සාදන දිශාවකට මේසයේ පාෂෂ්ටය දිගේ u ප්‍රවේගයෙන් ප්‍රක්ෂේපණය කරනු ලබන්නේ, පිළිවෙලින් Q, R, S ලක්ෂ්‍යවල දී BC, CD, DA ගැටවල වැදෙන පරිදි ය. බේරුයක් ගැටීත් අතර ප්‍රත්‍යාහනි සංගුණකය $e (> 0)$ වෙයි. Q, R, S ලක්ෂ්‍යවල දී පළමු ගැටුම්වලින් පසු T කාලයක දී බේරුය කම් P ආරම්භක ලක්ෂ්‍යය වෙත නැවත පැමිණෙයි නම්,

(i) $PQRS$ සමානතරාස්‍රයක් බවත්

$$(ii) T = \frac{u}{2a} (\sec \alpha) (1 + e^{-1})^2 \text{ බවත්}$$

සාධනය කරන්න. මෙහි $a = |AB|$.

9. AB ප්‍රත්‍යාසථ කන්තුවේ ස්ථානාවක දිග l ය. එහි A ඉහළ කෙළවර සිලින්ඩරවල ඇදූ කන්තුව පිරස්ව කඩා ඇත. කන්තුවේ B පහළ කෙළවරින් බර අංශුවක් ගැට ගසා කන්තුව නිශ්චලතාවයේ එල්ලෙන විට e විකෘතිය ඇති වෙයි. අංශුව සම්පූර්ණයෙන් පිහිටීමෙන් පසුව $d (> e)$ දුරක් පහළට ඇද නිශ්චලතාවේ පිට මුදා හැරිය හොත් අංශුවේ චලිතයෙන් කොටසක් $\sqrt{\frac{g}{e}}$ කෝණික සංවෘතය සහිත සරල අක්‍රමවර්තී චලිතයක් බව පෙන්වන්න.

අංශුව සිලින්ඩරවලින් නැගීමේ

$$l > \left(\frac{d^2 - e^2}{2e} \right)$$

බව සාධනය කර

$$2\sqrt{\frac{g}{e}} \left\{ \pi + \frac{\sqrt{d^2 - e^2}}{e} - \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{d^2 - e^2}}{e} \right) \right\}$$

මුළු කාලයකට පසු අංශුව යළිත් ආරම්භක ලක්ෂ්‍යයට පැමිණෙන බව ද සාධනය කරන්න.

10. I ආවේගයක් මගින් අංශුවක ප්‍රවේගය \mathbf{u} සිට \mathbf{v} වෙත වෙනස් කරයි නම් අංශුවේ ΔE වාලන ශක්ති වෙනස්වීම,

$$\Delta E = \frac{1}{2} I \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v})$$

යන්නෙන් දෙනු ලබන බව සාධනය කරන්න.

එක එකක ස්කන්ධය m වන A, B, C, D සමාන අංශු හතරක් AB, BC, CD සමාන අවිභාගයක් යුතු තත්වයේ තුනකින් සම්බන්ධ කර පූර්ව සිරස් වේදයක් මත නිසලව ඇත්තේ තත්වය නොපුරුල්ලි ද AB, BC, CD සවිච්ඡේදයක් පාද තුනක් ද වන පරිදි ය. මෙහිදී \vec{BA} දිශාවට I විශාලත්වයකින් යුත් ආවේගයක් A අංශුවට ලැබෙයි. D අංශුවේ ආරම්භක වේගය $\frac{I}{28m}$ බව පෙන්වන්න.

පද්ධතියට ලැබෙන වාලන ශක්තිය m හා I අනුපාතයේ සොයන්න.

11. P අංශුවක් Oxy කලයේ පිහිටි අරය a ද කේන්ද්‍රය O ද වූ වෘත්තාකාර වලනය වෙයි. P හේ කේන්ද්‍රයේ අරය සංරචකයක් සිරස්වත් සංරචකයක් පිළිවෙලින් $-a\theta^2$ හා $a\theta$ වන බව පෙන්වන්න. මෙහි θ යනු OP ක් x -අක්ෂයක් අතර කෝණයයි.

a අරයෙන් හා O කේන්ද්‍රයෙන් යුත් පූර්ව අර්ධ තෝලයක් එහි පතුල සිරස් කලයෙහි පිහිටන සේ සවි කර තිබෙයි. m ස්කන්ධයෙන් යුත් P නම් බර අංශුවක් අර්ධතෝලයේ ඉහළ ම ලක්ෂ්‍යයේ නිසලව තිබී මදක් විස්ථාපනය කළ පසු, අර්ධතෝලයේ වක්‍ර පෘෂ්ඨය මත ගලායායා වෙයි. OP අරය උඩු සිරස් සමඟ θ ($< \frac{\pi}{2}$) කෝණයක් සාදන විට

(i) P හේ ප්‍රවේගයක්

(ii) P මත ප්‍රතික්‍රියාවක්

සොයන්න.

අංශුව අර්ධතෝලයේ පෘෂ්ඨයෙන් ඉවත්ව යන විට P හේ ප්‍රවේගයේ සිරස් සංරචකයක් සිරස් සංරචකයක් පිළිවෙලින්

$$\frac{\sqrt{24ag}}{9} \quad \text{ද} \quad \frac{\sqrt{30ag}}{9} \quad \text{ද}$$

බව පෙන්වන්න.

12. ස්කන්ධය m ද අරය a ද වන ඒකාකාර වෘත්ත කැටියක, එහි කලයට ලම්බ කැටියේ කේන්ද්‍රය කරනා යන අක්ෂයක් වටා අවස්ථිති ගුණය $\frac{1}{2} ma^2$ බව පෙන්වන්න.

m ස්කන්ධයෙන් ද a අරයෙන් ද යුත් ඒකාකාර වෘත්ත කැටියකට, එහි C කේන්ද්‍රය කරනා යන අවල පූර්ව සිරස් අක්ෂයක් වටා භ්‍රමණය වීමට නිදහස තිබෙයි. P නම් කෘතියේ කැටියේ පහළ ම ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටි; මුළු පද්ධතිය ම නිසලව ඇත. කෘතියා කැටියේ ම, කැටියට සාපේක්ෂව V ඒකාකාර වේගයෙන් කැටියේ ගැටීයා දිගේ ගමන් කිරීම අරඹයි. කැටියේ ආරම්භක කෝණික වේගය $\frac{V}{11a}$ නම් කෘතියාගේ ස්කන්ධය සොයන්න.

ඉන් පසුව ඇති වන චලිතයේ දී CP ක් යටිතල සිරස්වත් අතර කෝණය θ නම්,

$$121 a^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + 22 ag - 22 ag \cos \theta = 100 V^2$$

බව සාධනය කරන්න.