සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි]
All Rights Reserved]

15436

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1994 අගෝස්තු
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1994

ව්‍යවහාරික ගණිතය II
Applied Mathematics II

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

අවශ්‍ය තැන්හි ගුරුත්වජ ත්වරණය, $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ ලෙස ගන්න.

1. (අ) $\frac{dy}{dx} + xy = y^3x$ අවකල සමීකරණයේ විසඳුම $y^2 e^{x^2} = c(y^2 - 1)$ ආකාරයෙන් ලබා ගන්න. මෙහි c යනු නියතයකි.

(ආ) Γ තල වක්‍රයක සිතූ ම $P \equiv (x, y)$ ලක්ෂ්‍යයක දී අනුක්‍රමණය, P ලක්ෂ්‍යයට O මූල ලක්ෂ්‍යය යා කැරෙන රේඛාවේ බෑවුම එකකින් ඉක්මවයි. Γ වක්‍රය $(-1, 0)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යයි නම්,

$$e^y = |x|^x$$

බව පෙන්වන්න.

2. අංකුවක්, දුනු තරාදියක් මගින් ආරෝහකයක (සෝපානයක) පියස්සෙන් සිරස් ලෙස එල්ලා තිබෙයි. ආරෝහකයේ උඩුකුරු චලිතය අවස්ථා තුනකින් සිදුවෙයි. පළමු වැනි අවස්ථාවේ දී ආරෝහකය නිසලව සිට නියත ත්වරණයෙන් ඉහළ නගියි; එවිට දුනු තරාදි පාඨාංකය $(1 + \frac{a}{g})$ kg කි. දෙ වැනි අවස්ථාවේ දී තත්පර t_0 පුරා ආරෝහකය ඉහළ නගින්නේ $V \text{ m s}^{-1}$ නියත ප්‍රවේගයෙනි; එවිට දුනු තරාදි පාඨාංකය 1 kg කි. අවසාන අවස්ථාවේ දී නිශ්චලතාවට එන තෙක් ආරෝහකය නියත මන්දනයෙන් ඉහළ නගියි; එවිට දුනු තරාදි පාඨාංකය $(1 - \frac{a}{g})$ kg කි. මෙහි $0 < a \leq g$. එම ගමනේ දී ආරෝහකය ඉහළ නැගි මුළු දුර මීටර h ද ගන්නා ලද මුළු කාලය තත්පර T ද නම්, එක් එක් අවස්ථාවේ දී ආරෝහකයේ ත්වරණය සොයන්න.

(i) ආරෝහකයේ චලිතය සඳහා ත්වරණ-කාල වක්‍රය ඇඳ

$$t_0 = T - \frac{2V}{a}$$

බව අපෝහනය කරන්න.

(ii) ආරෝහකයේ චලිතය සඳහා ප්‍රවේග-කාල වක්‍රය ඇඳ, ඒ නයින්,

$$V^2 - aTV + ah = 0.$$

බව පෙන්වන්න.

$$T \geq 2\sqrt{\frac{h}{g}}$$

බව අපෝහනය කරන්න.

3. OPQ සරල රේඛාවක් ඔස්සේ V වේගයෙන් චලනය වන අංශුවක් t වේලාවේ දී ඒකක ස්කන්ධයට kV^{n+2} $(n > 0)$ ප්‍රතිරෝධයකට භාජනය වෙයි. මෙහි k යනු ධන නියතයක් වන අතර අංශුව මත වෙනත් බල ක්‍රියා නොකරයි. ආරම්භයේ දී, අංශුව Oහි සිට u වේගයෙන් ගමන් අරඹයි. t කාලයකට පසු O සිට අංශුවට දුර x ය.

(i) $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{u}{(1 + knxu^n)^{\frac{1}{n}}}$ බවත්

(ii) $(1 + knx\, u^n)^{\frac{1}{n}} = \left[1 + k\,(n+1)\,t\, u^{n+1}\right]^{\frac{1}{n+1}}$ බවත්

සාධනය කරන්න.

අංශුව, P සිට Q තෙක් ගමන් කරන විට එහි වේගය W සිට αW $(\alpha > o)$ තෙක් අඩු වෙයි නම්, P සිට Q තෙක් ගමන පුරා අංශුවේ මධ්‍යක වේගය

$$\alpha W \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(\frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha^{n+1}}\right)$$

බව පෙන්වන්න.

4. (අ) v km h^{-1} සිත් යාත්‍රා කරන P බෝට්ටුවක් A වරායෙන් පිටත් වන්නේ, A ට d cosec α km නැගෙනහිරින් වූ B වරායෙන් පිටත් වන Q බෝට්ටුවේ සිට d km ක පරාසයක් තුළට පිවිසෙන පරිද්දෙනි. Q බෝට්ටුව $u(< v)$ km h^{-1} සිත් දකුණු දෙසට යාත්‍රා කරයි. පරාසය තුළට පිවිසීම සඳහා P බෝට්ටුව ගමන් කළ යුතු අන්ත දිශා දෙක අතර කෝණය 2α බව පෙන්වන්න.

(ආ) A හා B යනු $|\overrightarrow{AB}| = a$ වන පරිදි තලයක චලනය වන අංශු දෙකකි. මෙහි a යනු නියතයකි. මිනෑම මොහොතක දී A හේත් B හේත් ප්‍රවේග පිළිවෙළින් $\overrightarrow{AB}$ සමග වාමාවර්ත අතට $\dfrac{\pi}{6}$ හා $\dfrac{\pi}{3}$ කෝණ සාදන දිශාවලට වෙයි. AB රේඛාවේ කෝණික වේගය $\dfrac{u}{a}$ නම් මිනෑ ම මොහොතක දී A හා B අංශු දෙකේ වේග සොයන්න.

5. 60 km h^{-1} ක ඒකාකාර ප්‍රවේගයකින් සිරස් ලෙස චලනය වන ට්‍රක් රථයකින් ට්‍රේලරයක් ඇද ගෙන යයි. ට්‍රේලරයේ රළු සෘජුකෝණාස්‍ර පතුල මත කුඩා භාරයක් නිශ්චලව තබා ඇත්තේ ට්‍රේලරයේ ඉදිරිපස දාරයට මීටර 9 ක් දුරකිනි. $t = 0$ වේලාවේ දී ආරම්භ කර ට්‍රක් රථයට ඒකාකාර මන්දනයක් දෙනු ලබන්නේ මීටර d දුරක දී ට්‍රක් රථය නවතින පරිද්දෙනි. භාරය, ට්‍රේලරයට සාපේක්ෂව චලනය වීමට පටන් ගනියි නම්,

$$\mu < \frac{125}{9d}$$

බව පෙන්වන්න. මෙහි μ යනු භාරයත් ට්‍රේලරයේ පතුලත් අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය යි.

$d = 25$ ද $\mu = 0.4$ ද නම් භාරය තත්පර $\dfrac{25 - \sqrt{13}}{6}$ ක කාලයක දී $\dfrac{2\sqrt{13}}{3}$ m s^{-1} ප්‍රවේගයෙන් ට්‍රේලරයේ ඉදිරිපස දාරය වෙත ළඟා වන බව පෙන්වන්න.

6. V ප්‍රවේගයෙන් ගමන් කරන m ස්කන්ධයෙන් යුත් අංශුවක්, චලිතයට ප්‍රතිවිරුද්ධ දිශාවට වූ විචල්‍ය බලයෙකින් නිශ්චලතාවට ගෙන ඒමේ දී කැරෙන කාර්යය $\dfrac{1}{2}\, mV^2$ බව පෙන්වන්න.

$t = 0$ වේලාවේ දී නිශ්චලතාවෙන් ආරම්භ කරන g බරින් යුත් සෙල්ලම් රථයක් සුමට සිරස් බිමක ගමන් කරයි. t වේලාවේ දී රථය මත F ප්‍රකර්ෂණ බලය,

$$F = (10 + 19x - 2x^2)\, g$$

යන්නෙන් ලැබෙයි. මෙහි x යනු t කාලයේ දී රථය ගමන් කළ දුර ද $0 \le x \le 12$ ද වෙයි.

(i) $0 \le x \le \dfrac{19}{4}$ වන විට දී පමණක් රථය මත F ප්‍රකර්ෂණ බලය වැඩිවන බව පෙන්වන්න.

(ii) $0 \le x \le 12$ විට බලය-දුර වක්‍රය ඇඳ, ඒ නයින් හෝ අන් අයුරෙකින් හෝ රථයේ උපරිම වේගය

$$10\sqrt{\frac{23\,g}{3}}$$

බව පෙන්වන්න.

(iii) සෙල්ලම් රථයේ වේගය උපරිම විට එහි එන්ජිම ක්‍රියා කරන ජවය සොයන්න.

7. පොළොවේ ඉහළ h උසක නිසලව ඇති m ස්කන්ධයෙන් යුත් අංශුවක් සතු ශක්තිය සොයන්න.

නොගිණිය හැකි උසකින් යුත් 20 kg බර ළමයෙක්, සිරසට රේඩියන් $\frac{\pi}{3}$ ක ආනතියක් සහිත සෘජු පොල් ගසක මුදුනට නැගීමේ දී ගුරුත්වයට එරෙහිව කැරෙන කාර්යය $2\sqrt{3}$ kJ ය. පොල් ගසේ උස සොයන්න.

ගස මුදුනේ සිටින ළමයා පොල් ගෙඩියක් කඩා එහි සිට $V\ \mathrm{ms^{-1}}$ වේගයෙන් සිරස සමග α ආරෝහණ කෝණයකින් ගෙඩිය විසිකරන්නේ එය පොල් ගස මුලට වැටෙන පරිදි ය.

$$\cos\alpha\ \sin(\alpha+60) = \frac{25}{V^2}$$

බව පෙන්වා

$$V \geq 10\left(2-\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

බව අපෝහනය කරන්න.

8. u ප්‍රවේගයෙන් චලනය වන සුමට බෝලයක්, අචල සුමට තලයක් සමග θ කෝණයක් සාදන දිශාවක් ඔස්සේ තලයේ ගැටී, පිටි අතට අභිලම්බය සමග ϕ කෝණයක් සාදමින් V ප්‍රවේගයෙන් පොළා පනියි.

$$\cot\theta\ \cot\phi = e$$

බව පෙන්වන්න. මෙහි e යනු බෝලයත් තලයත් අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය යි.

A, B, C, D යනු සුමට, සිරස්, පසුම්බි රහිත සෘජුකෝණාස්‍රාකාර බිලියඩ් මේසයක කොන් හතරයි. එම මේසයේ දර හතර සුමට සිරස් ගැට්ටියකින් වටකොට ඇත. සුමට බිලියඩ් බෝලයක් $t = 0$ වේලාවේ දී AB හි P මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයේ සිට $\overrightarrow{AB}$ සමග α කෝණයක් සාදන දිශාවකට මේසයේ පෘෂ්ඨය දිගේ u ප්‍රවේගයෙන් ප්‍රක්ෂේපණය කරනු ලබන්නේ, පිළිවෙළින් Q, R, S ලක්ෂ්‍යවල දී BC, CD, DA ගැට්ටිවල වැදෙන පරිදි ය. බෝලයත් ගැට්ටිත් අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය $e\ (>0)$ වෙයි. Q, R, S ලක්ෂ්‍යවල දී සිදුවන ගැටුම්වලින් පසු T කාලයක දී බෝලය නැවත P ආරම්භක ලක්ෂ්‍යය වෙත නැවත පැමිණෙයි නම්,

(i) $PQRS$ සමාන්තරාස්‍රයක් බවත්

(ii) $T = \frac{a}{2u}(\sec\alpha)\ (1+e^{-1})^2$ බවත්

සාධනය කරන්න. මෙහි $a = \left|\overrightarrow{AB}\right|$.

9. AB ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවේ ස්වාභාවික දිග l ය. එහි A ඉහළ කෙළවර සිලිමකට ඇදා තන්තුව සිරස්ව තබා ඇත. තන්තුවේ B පහළ කෙළවරින් බර අංශුවක් ගැට ගසා තන්තුව නිශ්චලතාවයේ එල්ලෙන විට e විතතියක් ඇති වෙයි. අංශුව සමතුලිතතා පිහිටීමේ සිට තවත් $d\ (>e)$ දුරක් පහළට ඇද නිශ්චලතාවේ සිට මුදා හැරිය හොත් අංශුවේ චලිතයෙන් කොටසක් $\sqrt{\frac{g}{e}}$ කෝණික සංඛ්‍යාතය සහිත සරල අනුවර්තී චලිතයක් බව පෙන්වන්න.

අංශුව සිලිමේ වදින්නේ නැතිනම්

$$l > \left(\frac{d^2-e^2}{2e}\right)$$

බව සාධනය කර

$$2\sqrt{\frac{e}{g}}\ \left\{\pi + \frac{\sqrt{d^2-e^2}}{e} - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{d^2-e^2}}{e}\right)\right\}$$

මුළු කාලයකට පසු අංශුව යළිත් ආරම්භක ලක්ෂ්‍යයට පැමිණෙන බව ද සාධනය කරන්න.

10. I ආවේගයක් මගින් අංශුවක ප්‍රවේගය **u** සිට **v** තෙක් වෙනස් කරයි නම් අංශුවේ ΔE චාලක ශක්ති වෙනස්වීම,

$$\Delta E = \frac{1}{2}\,\mathbf{I}\,.\,(\mathbf{u} + \mathbf{v})$$

යන්නෙන් දෙනු ලබන බව සාධනය කරන්න.

එක එකක ස්කන්ධය m වන A, B, C, D සමාන අංශු හතරක් AB, BC, CD සමාන අවිතන්‍ය දුනු තන්තු තුනකින් සම්බන්ධ කර සුමට තිරස් මේසයක් මත නිසලව ඇත්තේ තන්තු නොබුරුල්ව ද AB, BC, CD සවිධි ෂඩස්‍රයක පාද තුනක් ද වන පරිදි ය. මේසය දිගේ $\overrightarrow{BA}$ දිශාවට I විශාලත්වයෙන් යුත් ආවේගයක් A අංශුවට ලැබෙයි. D අංශුවේ ආරම්භක වේගය $\frac{I}{28\,m}$ බව පෙන්වන්න.

පද්ධතියට ලැබෙන චාලක ශක්තිය m හා I ඇසුරෙන් සොයන්න.

11. P අංශුවක් Oxy තලයේ පිහිටි අරය a ද කේන්ද්‍රය O ද වූ වෘත්තයක චලනය වෙයි. P ගේ ත්වරණයේ අරීය සංරචකයත් තිර්යක් සංරචකයත් පිළිවෙළින් $-a\dot{\theta}^2$ හා $a\ddot{\theta}$ වන බව පෙන්වන්න. මෙහි θ යනු OP ත් x-අක්ෂයත් අතර කෝණයයි.

a අරයෙන් හා O කේන්ද්‍රයෙන් යුත් සුමට අර්ධ ගෝලයක් එහි පතුල තිරස් තලයක පිහිටන සේ සවි කර තිබෙයි. m ස්කන්ධයෙන් යුත් P නම් බර අංශුවක් අර්ධගෝලයේ ඉහළ ම ලක්ෂ්‍යයේ නිසලව සිට මදක් විස්ථාපනය කළ පසු, අර්ධගෝලයේ වක්‍ර පෘෂ්ඨය මත සර්පණය වෙයි. OP අරය උඩු සිරස සමඟ $\theta\left(< \frac{\pi}{2}\right)$ කෝණයක් සාදන විට

(i) P ගේ ප්‍රවේගයත්
(ii) P මත ප්‍රතික්‍රියාවත්

සොයන්න.

අංශුව අර්ධගෝලයේ පෘෂ්ඨයෙන් ඉවත්ව යන විට Pගේ ප්‍රවේගයේ තිරස් සංරචකයත් සිරස් සංරචකයත් පිළිවෙළින්

$$\frac{\sqrt{24\,ag}}{9} \quad \text{ද} \quad \frac{\sqrt{30\,ag}}{9} \quad \text{ද}$$

බව පෙන්වන්න.

12. ස්කන්ධය m ද අරය a ද වන ඒකාකාර වෘත්ත තැටියක, එහි තලයට ලම්බ තැටියේ කේන්ද්‍රය හරහා යන අක්ෂයක් වටා අවස්ථිති ඝූර්ණය $\frac{1}{2}\,ma^2$ බව පෙන්වන්න.

m ස්කන්ධයෙන් ද a අරයෙන් ද යුත් ඒකාකාර වෘත්ත තැටියකට, එහි C කේන්ද්‍රය හරහා යන අචල සුමට තිරස් අක්ෂයක් වටා භ්‍රමණය වීමට නිදහස තිබෙයි. P නම් කෘමියෙක් තැටියේ පහළ ම ලක්ෂ්‍යයේ සිටියි; මුළු පද්ධතිය ම නිසලව ඇත. කෘමියා හදිසියේ ම, තැටියට සාපේක්ෂව V ඒකාකාර වේගයෙන් තැටියේ ගැට්ය දිගේ ගමන් කිරීම අරඹයි. තැටියේ ආරම්භක කෝණික වේගය $\frac{V}{11a}$ නම් කෘමියාගේ ස්කන්ධය සොයන්න.

ඉන් පසුව ඇති වන චලිතයේ දී $\overrightarrow{CP}$ ත් යටිඅත් සිරසත් අතර කෝණය θ නම්,

$$121\,a^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + 22\,ag - 22\,ag\,\cos\theta = 100\,V^2$$

බව සාධනය කරන්න.