

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / Department of Examinations, Sri Lanka

| | | | | | |
|--|---|----|--|---|---|
| අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1993 අගෝස්තු General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1993 | | | | | |
| (02) ව්‍යවහාරික ගණිතය I (02) Applied Mathematics I | <table border="1"> <tr> <td colspan="2">02</td> </tr> <tr> <td>S</td> <td>I</td> </tr> </table> | 02 | | S | I |
| 02 | | | | | |
| S | I | | | | |
| පැතුනයි / Three hours | | | | | |

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

1. O, A, B යනු එක වර්ධය නො වන ලක්ෂ්‍ය තුනකි. $\vec{OA} = \mathbf{a}$, $\vec{OB} = \mathbf{b}$ වේ. C හා D ලක්ෂ්‍ය තෝරා ගනු ලබන්නේ $\vec{OC} = \lambda \mathbf{a}$ ද $\vec{OD} = \mu \mathbf{b}$ ද වන පරිදි ය. මෙහි $0 < \lambda < 1 < \mu$ වේ. AB වර්ධාවක් CD වර්ධාවක් E ලක්ෂ්‍යයේ දී හමු වෙයි. \vec{AE} හා \vec{AB} දෛශික දැලකීමෙන්,

$$\vec{OE} = (1 - \alpha)\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$$

බව පෙන්වන්න. මෙහි $0 < \alpha < 1$ වේ. ඒ නගිත්,

$$(\mu - \lambda)\mathbf{e} = \lambda(\mu - 1)\mathbf{a} + (1 - \lambda)\mu\mathbf{b}$$

බව සාධනය කරන්න. එහි $\mathbf{e} = \vec{OE}$.

(i) AB හි මධ්‍ය-ලක්ෂ්‍යය E නම් $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = 2$ බව පෙන්වන්න.

(ii) E යනු CD හි මධ්‍ය-ලක්ෂ්‍යය නම් λ හි μ හි සම්බන්ධ සෑදෙන සමීකරණය සොයන්න.

(iii) AD හා BC වර්ධාව,

$$(\lambda\mu - 1)\mathbf{f} = \lambda(\mu - 1)\mathbf{a} - (1 - \lambda)\mu\mathbf{b}$$

යන්නේ දෙනු ලබන \mathbf{f} පිහිටුම් දෛශිකය ඇති F ලක්ෂ්‍යයේ දී හමු වන බව පෙන්වන්න.

F ලක්ෂ්‍යයේ පැවතීම සඳහා වූ අවශ්‍යතාව λ හා μ ඇසුරෙන් සඳහන් කරන්න.

2. \mathbf{a} හා \mathbf{b} දෛශික දෙකේ අදිග ගුණිතය අර්ථ දැක්වන්න.

$OABC$ යනු චතුස්කලයකි. G හා H යනු

$$\vec{GO} + \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \mathbf{0} \text{ ද } \vec{HA} + \vec{HB} + \vec{HC} = \mathbf{0} \text{ ද}$$

වන පරිදි වූ ලක්ෂ්‍ය දෙකකි.

(i) BC හි මධ්‍ය-ලක්ෂ්‍යය D නම්, $\vec{AH} = 2\vec{HD}$ බවත්

(ii) $\vec{OG} = 3\vec{GH}$ බවත්

(iii) $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 4\vec{OG}$ බවත්

(iv) $GA^2 + GB^2 + GC^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 - 5OG^2$ බවත්

පෙන්වන්න.

3. a හා b නිශ්-ශුන්‍ය දෛශික දෙකේ $a \times b$ දෛශික ගුණිතය අර්ථ දක්වන්න.

A, B, C ප්‍රතිත්ත ලක්‍ෂ්‍ය තුනේ පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් a, b, c වෙයි. ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය

$$\frac{1}{2} | b \times c + c \times a + a \times b |$$

බව පෙන්වන්න.

$abc \neq 0$ ද Ox, Oy, Oz සාප්‍රකෝණයක් කාර්ටීසියානු අක්ෂ රාජ්‍යයේ වූ ඒකක දෛශික පිළිවෙලින් i, j, k ද වී $a = ai, b = bj, c = ck$ නම් ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය සොයන්න. ABC කලයට ලම්බ ඒකක දෛශික දෙක

$$\pm \frac{a^{-1}i + b^{-1}j + c^{-1}k}{\sqrt{a^{-2} + b^{-2} + c^{-2}}}$$

බව පෙන්වන්න.

තව ද, O සිට ABC කලයට ලම්බ දුර,

$$\frac{1}{\sqrt{a^{-2} + b^{-2} + c^{-2}}}$$

බව පෙන්වන්න.

4. දෘඪ වස්තුවක් මත ක්‍රියා කරන සමාන්තර හෝ වන ඒකකල බල තුනක් මගින් එම වස්තුව සමතුලිතතාවේ තබා ගනිති නම්, බලවල ක්‍රියාවේ රාශි ලක්‍ෂණයක දී හමු වන බව පෙන්වන්න.

සාදයක් a ද බර W ද වූ ABC සමපාද ත්‍රිකෝණයක හැඩයෙන් යුත් ඒකකාර ආස්තරයක් සුමට සිරස් බිත්තියකට ලම්බ සිරස් කලයක නිශ්චලතාවේ පිහිටයි. B ශීර්ෂය බිත්තිය හා ස්පර්ශ වෙමින් ද A ශීර්ෂය, a දිගැති යුතු අවකාශ තත්ත්වයක් මගින් බිත්තියේ වූ O ලක්‍ෂණයකට ඇද ද තබයි. සමතුලිතතා පිහිටීමේ දී OA තත්ත්වයේ යටිත්

සිරස් අතර θ ($< \frac{\pi}{12}$) කෝණය,

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

යන්නෙන් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

තත්ත්වයේ ආකෘතිය සොයන්න.

5. O ලක්‍ෂණයකින් O හරහා හෝ යන l රේඛාවකින් කලයක් නිර්ණය කැරෙයි. එම කලයේ ම පිහිටි වෙනත් m රේඛාවක් එලෙස ක්‍රියා කරන P බලයක්, අනන්‍ය ලෙස බල දෙකක් මගින්, එනම් l ඔස්සේ ක්‍රියා කරන එක බලයක් හා O හරහා ක්‍රියා කරන වෙනත් බලයකින් ප්‍රතිස්ථාපනය කළ හැකි බව පෙන්වන්න.

ABC ත්‍රිකෝණයේ කලයෙහි ක්‍රියා කරන p_i බලයක්, පිළිවෙලින් ත්‍රිකෝණයේ පාද ඔස්සේ ක්‍රියා කරන

$\alpha_i \overline{BC}, \beta_i \overline{CA}, \gamma_i \overline{AB}$ බල තුන මගින් ප්‍රතිස්ථාපනය කළ හැකි බව සාධනය කරන්න. ABC ත්‍රිකෝණයේ කලයෙහි බල පද්ධතියක් සාදමින් අනන්‍ය සඳහන් $P_i (i = 1, 2, \dots, n)$ බල n ගණනක් තිබෙයි නම්,

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{i=1}^n \beta_i = \sum_{i=1}^n \gamma_i$$

ම නම් සමකෝණ පද්ධතිය යුක්තියකට තුල්‍ය වන බව පෙන්වන්න.

පද්ධතිය සමතුලිතතාවේ පවතින්නේ කවර අවශ්‍යතා යටතේ ද?

6. එක එකක දිග $2a$ ද බර W ද වූ ද්‍රවු සුමට ලෙස සන්ධි කර කනා හත් $ABCDE$ පංචාස්‍රයක්, සිරස් තලයක සමමිතික ව රඳවා ඇත්තේ A ඉහළින් ම ද, CD සිරස් ව ද AB ත් AE ත් සුමට P, Q නාදකි සමඟ ස්පර්ශ වෙමින් ද පවතින පරිදි ය. එක ම සිරස් මට්ටමේ පිහිටි නාදකි ඉතර දුර කෙසේ ද යත් පංචාස්‍රය පවති ලෙස පවතින ඉසුරින් වෙයි. නාදකි මත ප්‍රතික්‍රියා යොදාගන්න.

- (i) B, C, D, E හි දී ප්‍රතික්‍රියාවල සිරස් සංචරක සමාන ද ඒ එක එකක විශාලත්වය $W \cot \frac{2\pi}{5}$ ද බවත්
 (ii) A සන්ධියේ දී ප්‍රතික්‍රියාව, $W \left(\frac{5}{2} \tan \frac{\pi}{5} - \tan \frac{\pi}{10} \right)$ ට සමාන සිරස් බලයක් බවත්
 (iii) P හා Q නාදකි ඉතර දුර $\frac{4a}{5} [6 \cos^2 \frac{\pi}{5} - 1] \cos \frac{\pi}{5}$ බවත්

පෙන්වන්න.

7. දරය r වූ සිහින් ඒකාකාර අර්ධ-වෘත්ත කම්බියක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය, කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{2r}{\pi}$ දුරකින් සමමිති ඉක්කය මත පිහිටින බව පෙන්වන්න. ඒ නයිත්, a දරයෙන් යුත් ඒකාකාර අර්ධ-වෘත්ත ආස්තරයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයේ පිහිටීම යොදාගන්න.

බර W වූ ඒකාකාර අර්ධ-වෘත්ත ආස්තරයක අර්ධ-වෘත්ත දරය වටා w බරකි ඒකාකාර සිහින් කම්බියක්, රාමුවක් ලෙස යොදා තිබෙයි. පද්ධතිය A ලක්ෂ්‍යයෙන් එල්ලා ඇති විට AB සරල දරය, යටියක් සිරස් සමඟ θ කෝණයක් සාදයි.

$$\frac{W}{w} = \frac{\frac{2}{\pi} - \tan \theta}{\tan \theta - \frac{4}{3\pi}}$$

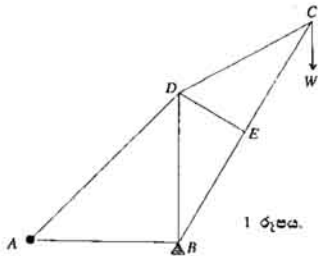
බව පෙන්වන්න. ඒ නයිත්,

$$\frac{4}{3\pi} < \tan \theta < \frac{2}{\pi}$$

බව අපෝහනය කරන්න.

8. 1 රූපයේ දක්වන්නේ, A, B, C, D, E ලක්ෂ්‍යවල දී සුවල ලෙස සන්ධි කළ යුතු ද්‍රවු කකසින් සමන්විත රාමු පැහැල්ලකි. A හි දී සුමට ලෙස අඩවූ කළ රාමුපැහැල්ල A හා එක ම සිරස් මට්ටමේ පිහිටි B හි දී සුමට සිරස් අධාරකයක් මත රඳා තිබෙයි.

$AB = DB = DC = 2 DE$ ද $\widehat{ABD} = \frac{\pi}{2}$, $\widehat{DBE} = \frac{\pi}{6}$ ද $BE = EC$ ද වේ. C ලක්ෂ්‍යයෙන් W බර එල්ලා ඇත. A හිත් B හිත් ප්‍රතික්‍රියා යොදාගන්න. බේර් අංකනය යොදා ගෙන ප්‍රකාශිත රූප සටහනක් අඳින්න. ඒ නයිත්, ද්‍රවුලට ඇත්තේ ආතති ද තෙරපුම් ද යන්න විරහ කර ද්‍රවුලට ප්‍රකාශිත නිර්ණය කරන්න.



9. බර්ෂණ කෝණය අර්ධ දක්වන්න.

ස්කන්ධය M වූ කුණ්ඩලයක්, එහි එක් මුහුණතක් රළ සිරස් බිමක ස්පර්ශ වන සේ තබා ඇත. සිරස්ව α කෝණයකින් ආනත කුණ්ඩලයේ අනෙක් මුහුණත මත m ස්කන්ධයෙන් යුත් කුඩා වස්තුවක් තිබෙයි. සිරස් බලයක් මගින් වස්තුව පහළට ලිස්සා යාමේ යම්කම් වළක්වා ඇත. කුණ්ඩලය නිශ්චල ව තිබෙයි. වස්තුවක් කුණ්ඩලයක් ඉතර බර්ෂණ කෝණය λ ($\lambda < \alpha$) වේ. කුණ්ඩලයක් සිරස් බිමින් ඉතර බර්ෂණ සංගුණකය μ නම්

$$\mu \geq \frac{m}{M+m} \tan(\alpha - \lambda)$$

බව පෙන්වන්න.

කුණ්ඩලය නිශ්චල ව තිබෙන විට, $(\alpha + \lambda < \frac{\pi}{2})$, වස්තුව ඉහළට ලිස්සා යාමට ආසන්න ම අවස්ථාවේ පවතින නම් μ ට සීමිය යුතු අඩුකම අගය යොදාගන්න.

10. පාදයක් a වූ $ABCD$ සමචතුරස්‍ර ආකාරයක්, ද්‍රව්‍යක ගිල්වා ඇත්තේ AB පාදය ද්‍රව පෘෂ්ඨයේ සිටින සේ සිරසට θ කෝණයකින් ආනත වන පරිදි ය. AB හිත් CD හිත් මධ්‍ය-ලක්ෂය යා කැරෙන රේඛාව මත $\frac{2a}{3} \cos \theta$ ගැඹුරකින් පිහිටන සේ වන බව පෙන්වන්න.

සනසාකාර පෙට්ටියක එක් මුහුණතක් එක දරයක් වටා අසවු කර තිබේ. පෙට්ටිය සම්පූර්ණයෙන් ම ජලයෙන් පුරවා, අසවු කළ මුහුණත සිරස් ව තිබෙන සේ ද අසවු රේඛාව එම මුහුණතේ ඉහළ සිරස් පාදයේ පිහිටන සේ ද රඳවා ගෙන ඇත. ඉන්පසු පෙට්ටිය, එහි තට් අඩක් ගිලෙන තෙක් පිඹිණිම කරන්නට අසවු වෙනස් ද්‍රව්‍යක සිරස් ලෙස ගිල්වනු ලැබේ.

$\sigma = \frac{3}{2}$ තම් අසවු කළ මුහුණත නිදහස් ලෙස සම්පූර්ණයෙන් පවතින බව පෙන්වන්න.

11. කල වර්තන ලක්ෂණ මත බර සමාන ද්‍රව්‍යක තෙරපුම, වර්තන ලක්ෂණයේ කෝණයේ දී පිටතයේ ගුණිතයට සමාන බව සාධනය කරන්න.

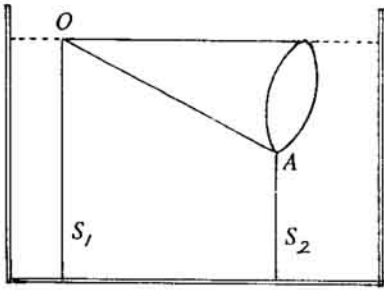
අරය a ද දිග l ද වූ ඒකාකාර සන සාදු වෘත්ත පිලිවෙරයක් ρ ඝනත්වයෙන් යුත් ජලයේ ඉපිලෙන්නේ, එහි අක්ෂය ජල පෘෂ්ඨයේ පිහිටන පරිදි ය. අක්ෂය හරහා යන සිරස් කලයක් එක් සයනය (පැත්තක) වූ කෝණ වක්‍ර පෘෂ්ඨ කොටස මත සම්පූර්ණයෙන් තෙරපුමේ විශාලත්වය

$$\frac{a^2 l \rho g}{4} \sqrt{\pi^2 + 4}$$

බව පෙන්වන්න. සම්පූර්ණයෙන් තෙරපුමේ ස්‍රියා රේඛාව සොයන්න.

12. ද්‍රව්‍ය විකිසයෙහි ආසිම්මික් මූලධර්මය ප්‍රකාශකර සාධනය කරන්න.

සිරස් කෝණය 2θ ද පිඹිණිම කරන්නට $s (< 1)$ ද වූ ඒකාකාර සන සාදු වෘත්ත කෝණයක් ජලයේ සම්පූර්ණයෙන් ම ගිල්වා ඇත්තේ එහි ජනකයක් ජල පෘෂ්ඨයේ සිටින සේ ය. කෝණය සාදු වෘත්තය පිහිටීමේ රඳවා තිබෙන්නේ O ගිර්භයටත් ආධාරකයේ පහළ ම A ලක්ෂයටත් පිළිවෙලින් ඈඳු S_1, S_2 සිරස් කන්කු දෙක මගිනි. එක් එක් කන්කුවේ අනෙක් කෙළවර කාපනයේ පතුලට සම්බන්ධ කර තිබේ. [2 රූපය]



2 රූපය

කන්කු දෙක ම හෝ බුරුල් ව ඇත් නම් S_2 කන්කුවේ ආකෘතිය

$$\frac{3W}{4} \left(\frac{1}{s} - 1 \right) \frac{\cos^2 \theta}{\cos 2\theta}$$

බව පෙන්වන්න. එහි W යනු කෝණයේ බර යි.

අනෙක් කන්කුවේ ආකෘතිය සොයන්න. ඒ නමින්, $\theta > \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ බව අපෝහනය කරන්න.