16166

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1993 අගෝස්තු
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1993

(02) ව්‍යවහාරික ගණිතය I
(02) Applied Mathematics I

02 | S | I

පැය තුනයි / *Three hours*

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

---

1. O, A, B යනු ඒක රේඛීය නොවන ලක්ෂ්‍ය තුනකි. $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ වේ. C හා D ලක්ෂ්‍ය තෝරා ගනු ලබන්නේ $\overrightarrow{OC} = \lambda\mathbf{a}$ ද $\overrightarrow{OD} = \mu\mathbf{b}$ ද වන පරිදි ය. මෙහි $0 < \lambda < 1 < \mu$ වේ. AB රේඛාවත් CD රේඛාවත් E ලක්ෂ්‍යයේ දී හමු වෙයි. $\overrightarrow{AE}$ හා $\overrightarrow{AB}$ දෛශික සැලකීමෙන්,

$$\overrightarrow{OE} = (1-\alpha)\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$$

බව පෙන්වන්න. මෙහි $0 < \alpha < 1$ වේ. ඒ නයින්,

$$(\mu - \lambda)\mathbf{e} = \lambda(\mu - 1)\mathbf{a} + (1 - \lambda)\mu\mathbf{b}$$

බව සාධනය කරන්න. එහි $\mathbf{e} = \overrightarrow{OE}$.

   (i) AB හි මධ්‍ය-ලක්ෂ්‍යය E නම් $\dfrac{1}{\lambda} + \dfrac{1}{\mu} = 2$ බව පෙන්වන්න.

   (ii) E යනු CD හි මධ්‍ය-ලක්ෂ්‍යය නම් λ ත් μ ත් සම්බන්ධ කැරෙන සමීකරණය සොයන්න.

   (iii) AD හා BC රේඛා,

$$(\lambda\mu - 1)\mathbf{f} = \lambda(\mu - 1)\mathbf{a} - (1 - \lambda)\mu\mathbf{b}$$

   යන්නේ දෙනු ලබන $\mathbf{f}$ පිහිටුම් දෛශිකය ඇති F ලක්ෂ්‍යයේ දී හමු වන බව පෙන්වන්න.

F ලක්ෂ්‍යයේ පැවතීම සඳහා වූ අවශ්‍යතාව λ හා μ ඇසුරෙන් සඳහන් කරන්න.

2. $\mathbf{a}$ හා $\mathbf{b}$ දෛශික දෙකේ අදිශ ගුණිතය අර්ථ දක්වන්න.

$OABC$ යනු චතුස්තලයකි. G හා H යනු

$$\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \mathbf{0} \text{ ද } \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \mathbf{0} \text{ ද}$$

වන පරිදි වූ ලක්ෂ්‍ය දෙකකි.

   (i) BC හි මධ්‍ය-ලක්ෂ්‍යය D නම්, $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{HD}$ බවත්

   (ii) $\overrightarrow{OG} = 3\overrightarrow{GH}$ බවත්

   (iii) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OG}$ බවත්

   (iv) $GA^2 + GB^2 + GC^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 - 5\,OG^2$ බවත්

   පෙන්වන්න.

3. $\mathbf{a}$ හා $\mathbf{b}$ නිශ්-ශූන්‍ය දෛශික දෙකේ $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ දෛශික ගුණිතය අර්ථ දක්වන්න.

A, B, C ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය තුනේ පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ වෙයි. ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය

$$\frac{1}{2} \left| \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{b} \right|$$

බව පෙන්වන්න.

$abc \neq 0$ ද Ox, Oy, Oz සෘජුකෝණාස්‍ර කාටීසිය අක්ෂ වල්ලේ වූ ඒකක දෛශික පිළිවෙළින් $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ද විට $\mathbf{a} = a\mathbf{i}$, $\mathbf{b} = b\mathbf{j}$, $\mathbf{c} = c\mathbf{k}$ නම් ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය සොයන්න.
ABC තලයට ලම්බ ඒකක දෛශික දෙක

$$\pm \frac{a^{-1}\mathbf{i} + b^{-1}\mathbf{j} + c^{-1}\mathbf{k}}{\sqrt{a^{-2} + b^{-2} + c^{-2}}}$$

බව පෙන්වන්න.

තව ද, O සිට ABC තලයට ලම්බ දුර,

$$\frac{1}{\sqrt{a^{-2} + b^{-2} + c^{-2}}}$$

බව පෙන්වන්න.

4. දෘඪ වස්තුවක් මත ක්‍රියා කරන සමාන්තර නොවන ඒකතල බල තුනක් මගින් එම වස්තුව සමතුලිතතාවේ තබා ගනියි නම්, බලවල ක්‍රියාරේඛා එක් ලක්ෂ්‍යයක දී හමු වන බව පෙන්වන්න.

පාදයක් a ද බර W ද වූ ABC සමපාද ත්‍රිකෝණයක හැඩයෙන් යුත් ඒකාකාර ආස්තරයක් සුමට සිරස් බිත්තියකට ලම්බ සිරස් තලයක නිශ්චලතාවේ පිහිටයි. B ශීර්ෂය බිත්තිය හා ස්පර්ශ වෙමින් ද A ශීර්ෂය, a දිගැති යුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගින් බිත්තියේ වූ O ලක්ෂ්‍යයකට ඈඳ ද තිබෙයි. සමතුලිතතා පිහිටීමේ දී OA තන්තුවත් යටියක්

සිරසත් අතර θ $\left(< \frac{\pi}{12}\right)$ කෝණය,

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

යන්නෙන් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

තන්තුවේ ආතතිය සොයන්න.

5. O ලක්ෂ්‍යයකිනුත් O හරහා නොයන l රේඛාවකිනුත් තලයක් නිර්ණය කැරෙයි. එම තලයේ ම පිහිටි වෙනත් m රේඛාවක් වල්ලේ ක්‍රියා කරන P බලයක්, අනන්‍ය ලෙස බල දෙකක් මගින්, එනම් l ඔස්සේ ක්‍රියා කරන එක බලයක් හා O හරහා ක්‍රියා කරන වෙනත් බලයකින් ප්‍රතිස්ථාපනය කළ හැකි බව පෙන්වන්න.

ABC ත්‍රිකෝණයේ තලයෙහි ක්‍රියා කරන P_i බලයක්, පිළිවෙළින් ත්‍රිකෝණයේ පාද ඔස්සේ ක්‍රියා කරන $\alpha_i \overrightarrow{BC}$, $\beta_i \overrightarrow{CA}$, $\gamma_i \overrightarrow{AB}$ බල තුන මගින් ප්‍රතිස්ථාපනය කළ හැකි බව සාධනය කරන්න. ABC ත්‍රිකෝණයේ තලයෙහි බල පද්ධතියක් සාදමින් ඉහත සඳහන් $P_i, (i = 1, 2, \ldots, n)$ බල n ගණනක් තිබෙයි නම්,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i$$

ම නම් පමණක් පද්ධතිය යුග්මයකට තුල්‍ය වන බව පෙන්වන්න.

පද්ධතිය සමතුලිතතාවේ පවතින්නේ කවර අවශ්‍යතා යටතේ ද?

6. එක එකක දිග $2a$ ද බර W ද වූ දඬු සුමට ලෙස සන්ධි කර තනා ගත් $ABCDE$ පංචාස්‍රයක්, සිරස් තලයක සමමිතික ව රඳවා ඇත්තේ A ඉහළින් ම ද, CD තිරස් ව ද ABත් AEත් සුමට P, Q නාදති සමග ස්පර්ශ වෙමින් ද පවතින පරිදි ය. එක ම තිරස් මට්ටමේ පිහිටි නාදති අතර දුර කෙසේ ද යත් පංචාස්‍රය සවිධි ලෙස පවතින අයුරින් වෙයි. නාදති මත ප්‍රතික්‍රියා සොයන්න.

(i) B, C, D, E හි දී ප්‍රතික්‍රියාවල තිරස් සංරචක සමාන ද ඒ එක එකක විශාලත්වය $W \cot \frac{2\pi}{5}$ ද බවත්

(ii) A සන්ධියේ දී ප්‍රතික්‍රියාව, $W\left(\frac{5}{2} \tan \frac{\pi}{5} - \tan \frac{\pi}{10}\right)$ ට සමාන තිරස් බලයක් බවත්

(iii) P හා Q නාදති අතර දුර $\frac{4a}{5}\left[6 \cos^2 \frac{\pi}{5} - 1\right] \cos \frac{\pi}{5}$ බවත්

පෙන්වන්න.

7. අරය r වූ සිහින් ඒකාකාර අර්ධ-වෘත්ත කම්බියක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය, කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{2r}{\pi}$ දුරකින් සමමිති අක්ෂය මත පිහිටන බව පෙන්වන්න. ඒ නයින්, a අරයෙන් යුත් ඒකාකාර අර්ධ-වෘත්ත ආස්තරයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයේ පිහිටීම සොයන්න.

බර W වූ ඒකාකාර අර්ධ-වෘත්ත ආස්තරයක අර්ධ-වෘත්ත දරය වටා w බරැති ඒකාකාර සිහින් කම්බියක්, රාමුවක් ලෙස යොද තිබෙයි. පද්ධතිය A ලක්ෂ්‍යයෙන් එල්ලා ඇති විට AB සරල දරය, යටියත් සිරස සමග θ කෝණයක් සාදයි.

$$\frac{W}{w} = \frac{\frac{2}{\pi} - \tan\theta}{\tan\theta - \frac{4}{3\pi}}$$

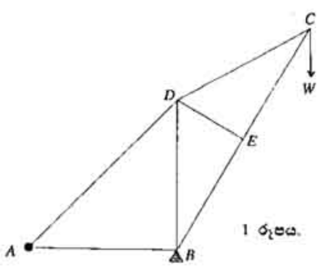
බව පෙන්වන්න. ඒ නයින්,

$$\frac{4}{3\pi} < \tan\theta < \frac{2}{\pi}$$

බව අපෝහනය කරන්න.

8. 1 රූපයේ දක්වෙන්නේ, A, B, C, D, E ලක්ෂ්‍යවල දී සුවල ලෙස සන්ධි කළ ලුහු දඬු හතකින් සමන්විත රාමු සැකිල්ලකි. A හි දී සුමට ලෙස අසව් කළ රාමුසැකිල්ල A හා එක ම තිරස් මට්ටමේ පිහිටි B හි දී සුමට සිරස් ආධාරකයක් මත රඳ තිබෙයි.

$AB = DB = DC = 2\,DE$ ද $A\widehat{B}D = \frac{\pi}{2}$, $D\widehat{B}E = \frac{\pi}{6}$ ද $BE = EC$ ද වේ. C ලක්ෂ්‍යයෙන් W බර එල්ලා ඇත. A හිත් B හිත් ප්‍රතික්‍රියා සොයන්න. බෝ අංකනය යොද ගෙන ප්‍රත්‍යාබල රූප සටහනක් අඳින්න. ඒ නයින්, දඬුවල ඇත්තේ ආතති ද තෙරපුම් ද යන්න වර්ග කර දඬුවල ප්‍රත්‍යාබල නිර්ණය කරන්න.



1 රූපය.

9. ඝර්ෂණ කෝණය අර්ථ දක්වන්න.

ස්කන්ධය M වූ කූඤ්ඤයක්, එහි එක් මුහුණතක් රළු තිරස් බිමක ස්පර්ශ වන සේ තබා ඇත. තිරසට α කෝණයකින් ආනත කූඤ්ඤයේ අනෙක් මුහුණත මත m ස්කන්ධයෙන් යුත් කුඩා වස්තුවක් තිබෙයි. තිරස් බලයක් මගින් වස්තුව පහළට ලිස්සා යාම යන්තම් වළක්වා ඇත. කූඤ්ඤය නිශ්චල ව තිබෙයි. වස්තුවත් කූඤ්ඤයත් අතර ඝර්ෂණ කෝණය λ ($<\alpha$) වේ. කූඤ්ඤයත් තිරස් බිමත් අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය μ නම්

$$\mu \geq \frac{m}{M+m} \tan(\alpha - \lambda)$$

බව පෙන්වන්න.

කූඤ්ඤය නිශ්චල ව තිබෙන විට, $\left(\alpha + \lambda < \frac{\pi}{2}\right)$, වස්තුව ඉහළට ලිස්සා යාමට ආසන්න ම අවස්ථාවේ පවතියි නම් μ ට තිබිය යුතු අඩුතම අගය සොයන්න.

10. පාදයක් a වූ $ABCD$ සමචතුරස්‍ර ආස්තරයක්, ද්‍රවයක ගිල්වා ඇත්තේ AB පාදය ද්‍රව පෘෂ්ඨයේ තිබෙන සේ සිරසට θ කෝණයකින් ආනත වන පරිදි ය. AB හිත් CD හිත් මධ්‍ය-ලක්ෂ්‍ය යා කැරෙන රේඛාව මත $\frac{2a}{3}\cos\theta$ ගැඹුරකින් පීඩන කේන්ද්‍රය පිහිටන බව පෙන්වන්න.

ඝනකාකාර පෙට්ටියක එක් මුහුණතක් එක දාරයක් වටා අසවු කර තිබෙයි. පෙට්ටිය සම්පූර්ණයෙන් ම ජලයෙන් පුරවා, අසවු කළ මුහුණත සිරස් ව තිබෙන සේ ද අසවු රේඛාව එම මුහුණතේ ඉහළ සිරස් පාදයේ පිහිටන සේ ද රඳවා ගෙන ඇත. ඉන්පසු පෙට්ටිය, එහි හරි අඩක් ගිලෙන තෙක් විශිෂ්ට ගුරුත්වය σ වූ වෙනත් ද්‍රවයක සිරස් ලෙස ගිල්වනු ලැබෙයි.

$\sigma = 3\frac{1}{3}$ නම් අසවු කළ මුහුණත නිදහස් ලෙස සමතුලිතාවේ පවතින බව පෙන්වන්න.

11. තල වර්ගඵලයක් මත බර සමජාතීය ද්‍රවයක තෙරපුම, වර්ගඵලයේත් කේන්ද්‍රකයේ දී පීඩනයේත් ගුණිතයට සමාන බව සාධනය කරන්න.

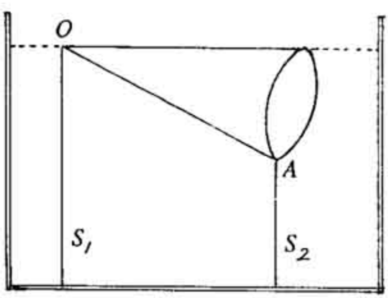
අරය a ද දිග l ද වූ ඒකාකාර ඝන ඍජු වෘත්ත සිලින්ඩරයක් ρ ඝනත්වයෙන් යුත් ජලයේ ඉපිලෙන්නේ, එහි අක්ෂය ජල පෘෂ්ඨයේ පිහිටන පරිදි ය. අක්ෂය හරහා යන සිරස් තලයෙන් එක් පසෙක (පැත්තක) වූ තෙත් වක්‍ර පෘෂ්ඨ කොටස මත සම්ප්‍රයුක්ත තෙරපුමේ විශාලත්වය

$$\frac{a^2 l \rho g}{4}\sqrt{\pi^2+4}$$

බව පෙන්වන්න. සම්ප්‍රයුක්ත තෙරපුමේ ක්‍රියා රේඛාව සොයන්න.

12. ද්‍රවස්ථිතිකයෙහි ආකිමිඩීස් මූලධර්මය ප්‍රකාශකර සාධනය කරන්න.

සිරස් කෝණය 2θ ද විශිෂ්ට ගුරුත්වය $s(<1)$ ද වූ ඒකාකාර ඝන ඍජු වෘත්ත කේතුවක් ජලයේ සම්පූර්ණයෙන් ම ගිල්වා ඇත්තේ එහි ජනකයක් ජල පෘෂ්ඨයේ තිබෙන සේ ය. කේතුව සමතුලිතතා පිහිටීමේ රඳවා තිබෙන්නේ O ශීර්ෂයටත් ආධාරකයේ පහළ ම A ලක්ෂ්‍යයටත් පිළිවෙළින් ඈඳූ S_1, S_2 සිරස් තන්තු දෙක මගිනි. එක් එක් තන්තුවේ අනෙක් කෙළවර භාජනයේ පතුලට සම්බන්ධ කර තිබෙයි. [2 රූපය]



2 රූපය

තන්තු දෙක ම නො බුරුල් ව ඇත් නම් S_2 තන්තුවේ ආතතිය

$$\frac{3W}{4}\left(\frac{1}{s}-1\right)\frac{\cos^2\theta}{\cos 2\theta}$$

බව පෙන්වන්න. එහි W යනු කේතුවේ බර යි.

අනෙක් තන්තුවේ ආතතිය සොයන්න. ඒ නයින්, $\theta > \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ බව අපෝහනය කරන්න.