සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි]
All Rights Reserved]

16077

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1993 අගෝස්තු
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1993

(02) ව්‍යවහාරික ගණිතය I
(02) Applied Mathematics I

02
S | I

පැය තුනයි / *Three hours*

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

---

1. P, Q, R යනු ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය තුනකි. ඒවායේ පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $\overrightarrow{OP} = \mathbf{p}$, $\overrightarrow{OQ} = \mathbf{q}$, $\overrightarrow{OR} = \mathbf{r}$ වෙයි.

$$\mathbf{r} = \alpha\, \mathbf{p} + (1-\alpha)\mathbf{q}$$

වන පරිදි වූ α සංඛ්‍යාවක් පවතියි ම නම් පමණක් P, Q, R ඒකරේඛීය බව පෙන්වන්න.

ABC ත්‍රිකෝණයේ පිළිවෙළින් BC, CA, AB පාද මත P, Q, R ලක්ෂ්‍ය පිහිටා ඇත්තේ $\overrightarrow{BP} = \lambda \overrightarrow{PC}$, $\overrightarrow{CQ} = \mu \overrightarrow{QA}$ හා $\overrightarrow{AR} = \nu \overrightarrow{RB}$ වන පරිදි ය. මෙහි $\lambda\mu\nu \neq 0$. $\overrightarrow{CA} = \mathbf{a}$ ද $\overrightarrow{CB} = \mathbf{b}$ ද නම් මූල ලක්ෂ්‍යය ලෙස C ගෙන එය අනුබද්ධයෙන් P, Q, R ලක්ෂ්‍යවල පිහිටුම් දෛශික සොයන්න.

ඒ නයින් $\lambda\mu\nu = -1$ ම නම් පමණක් P, Q, R ඒකරේඛීය බව පෙන්වන්න.

2. $\mathbf{a}$ හා $\mathbf{b}$ යන නිශ්-ශූන්‍ය දෛශික දෙකේ අදිශ ගුණිතය අර්ථ දක්වන්න.

ABC ත්‍රිකෝණයේ $\overrightarrow{CA} = \mathbf{a}$ ද $\overrightarrow{CB} = \mathbf{b}$ ද යැයි ගනිමු. $(\mathbf{a}-\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a}-\mathbf{b})$ අදිශ ගුණිතය සැලකීමෙන්

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

බව පෙන්වන්න. මෙහි $a = |\mathbf{a}|$, $b = |\mathbf{b}|$ හා $c = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$.

L ලක්ෂ්‍යය කෙසේ ද යත් ACB කෝණයේ සමච්ඡේදකය CL වන පරිදි AB මත වූ ලක්ෂ්‍යයක් වෙයි. $\mathbf{a}$ හා $\mathbf{b}$ එක එකක් සමග $\overrightarrow{CL} = \mathbf{l}$ දෛශිකයේ අදිශ ගුණිතය සැලකීමෙන්

$$\mathbf{l} = \frac{b\mathbf{a} + a\mathbf{b}}{a + b}$$

බව පෙන්වන්න.

$$CL^2 = ab\left[1 - \frac{c^2}{(a+b)^2}\right]$$

බව අපෝහනය කරන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

3. $\mathbf{a}$ හා $\mathbf{b}$ යන නිශ් -ශූන්‍ය දෛශික දෙකේ $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ දෛශික ගුණිතය අර්ථ දක්වන්න.

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, යනු සුරත් කාටීසිය පද්ධතියක පිළිවෙළින් Ox, Oy, Oz අක්ෂවල ධන දිශා ඔස්සේ වූ ඒකක දෛශිකයි. $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$ හා $\mathbf{k} \times \mathbf{j}$ අගයන්න.

ධ්‍රැවය O ද, ආරම්භක රේඛාව Ox ද වශයෙන් ගෙන, ඒවා අනුබද්ධයෙන් Oxy තලයේ වූ A, B, C, ලක්ෂ්‍යවල, ධ්‍රැවක ඛණ්ඩාංක (r, α), (r, β) හා $(r, -\alpha)$ වෙයි. මෙහි $\beta > \alpha > 0$ වෙයි. $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$ දෛශික සඳහා ප්‍රකාශන r, α, β, $\mathbf{i}$ හා $\mathbf{j}$ ඇසුරෙන් ලියා දක්වන්න.

එක් එක් අවස්ථාවේ දී සුදුසු දෛශික දෙකක දෛශික ගුණිතය සැලකීමෙන් $\sin(\beta - \alpha)$ හා $\sin(\beta + \alpha)$ සඳහා ප්‍රසාරණ ලබා ගන්න.

$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ නම් $\mathbf{k} \times \mathbf{c} = \mathbf{b}$ බවත් $\mathbf{k} \times \mathbf{b} = -\mathbf{c}$ බවත් පෙන්වන්න.

4. බර W ද අරය a ද වූ ඒකාකාර ඝන ගෝලයක් a දිගැති තන්තුවක් මගින් අචල O ලක්ෂ්‍යයකින් එල්ලා තිබෙයි. බර W ද දිග $4a$ ද වූ ඒකාකාර දණ්ඩක එක් කෙළවරක් එම O ලක්ෂ්‍යයට ම නිදහසේ ඈඳා ඇත. දණ්ඩ ගෝලය හා ස්පර්ශ වෙමින් නිසල ව තිබෙයි නම් තන්තුවේත් දණ්ඩේත් සිරසට ආනති එක එකක් $\frac{\pi}{12}$ ට සමාන වන බව පෙන්වන්න.

තන්තුවේ ආතතිය $\dfrac{W \cos(\frac{\pi}{12})}{\sin(\frac{\pi}{3})}$ බව ද පෙන්වා, ගෝලයත් දණ්ඩත් අතර ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න.

5. සමතුලිතතාවේ නොපවතින ඒකතල බල පද්ධතියක් එක්කෝ තනි බලයකට, නැති නම් තනි යුග්මයකට උනනය වන බව පෙන්වන්න.

පිළිවෙළින් P, $4P$, $2P$, $2P$, $3P$, $3P$ බල හයක් $ABCDEF$ සවිධි ෂඩස්‍රයෙක AB, BC, CD, DE, EF හා FA පාද ඔස්සේ ක්‍රියා කරන්නේ අක්ෂරවල පටිපාටියෙන් දක්වා ඇති දිශාවලට ය. පද්ධතිය යුග්මයකට උනනය වන බව පෙන්වන්න. ෂඩස්‍රයේ පාදයක දිග a නම් යුග්මයේ විශාලත්වය සොයන්න.

ඒ හයින්, පළමු වැනි බල පසේ සම්ප්‍රයුක්තයේ විශාලත්වයත්, දිශාවත් ක්‍රියා රේඛාවත් සොයන්න.

6. AB, BC, CD, DA සමාන, ඒකාකාර දඬු හතරක් නිදහස් ලෙස සන්ධි කර ඇත්තේ $ABCD$ සමචතුරස්‍රයක් සැදෙන පරිදි ය. පද්ධතිය A ලක්ෂ්‍යයෙන් එල්ලා තිබෙයි. සමචතුරස්‍ර හැඩය පවත්වා ගන්නේ AB හිත් BC හිත් මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය යා කැරෙන අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගිනි. එක් එක් දණ්ඩේ බර W නම්

(i) C හි දී ප්‍රතික්‍රියාව, සිරසට $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ කෝණයකින් ආනත දිශාවකට වූ $\frac{W\sqrt{5}}{2}$ බවත්

(ii) D හි දී ප්‍රතික්‍රියාව, තිරස් දිශාවකට වූ $\frac{W}{2}$ බවත්

(iii) යා කැරෙන තන්තුවේ ආතතිය $4W$ බවත්

(iv) B හි දී ප්‍රතික්‍රියාව, සිරසට $\tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$ කෝණයකින් ආනත දිශාවකට වූ $\frac{W\sqrt{17}}{2}$ බවත්

සාධනය කරන්න.

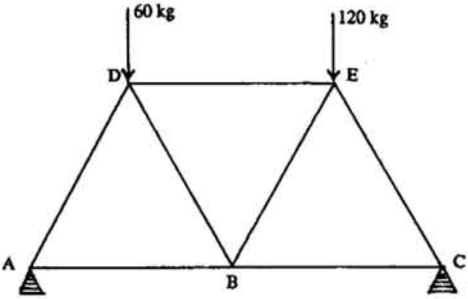
7. අරය a වූ ඒකාකාර ගෝලීය කබොලක් එහි කේන්ද්‍රය වූ O ට $a \cos \alpha$ දුරකින් $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$ වූ තලයක් මගින් කොටස් දෙකකට බෙදනු ලැබේ. වඩා විශාල කොටසේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය සමමිති අක්ෂය මත O ලක්ෂ්‍යයේ සිට $\frac{a}{2}(1 - \cos \alpha)$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

කබොලේ වඩා විශාල කොටස එම ද්‍රව්‍යයෙන් ම සෑදි අරය $a \sin \alpha$ වූ තැටියකින් වසනු ලැබේ. එසේ සෑදුනු සංයුක්ත වස්තුවේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය O ලක්ෂ්‍යයේ සිට

$$\frac{a\,(1 - \cos \alpha)^2}{3 - \cos \alpha}$$

දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

8. රූපයේ දැක්වෙන රාමු සැකිල්ල සුමට ලෙස සන්ධිකළ AB, BC, CE, BD, BE, DE, AD යන සැහැල්ලු සමාන දඬු හතකින් සමන්විත වේ. එය එහි තලය සිරස්ව සිටින ලෙස සහ ABC තිරස්ව පවතින ලෙස A සහ C හිදී නිදහසේ රඳවා ඇති අතර D සහ E හිදී පිළිවෙළින් 60 kg සහ 120 kg භාර දරා සිටියි.



A සහ C හි ප්‍රතික්‍රියා සොයන්න.

ප්‍රත්‍යාබල සටහනක් ඇඳ, ආතති සහ තෙරපුම් වශයෙන් වෙන්කොට දක්වමින්, එක් එක් දණ්ඩේ ප්‍රත්‍යාබලය සොයන්න.

9. ඒකාකාර ඝන වෘත්ත සිලින්ඩරයක්, තිරසට α කෝණයකින් ප්‍රතිවිරුද්ධ අතට සවිකරන ලද සමාන රළු බවින් යුත් ආනත තල දෙකක් මත තිරස්ව පවතින ලෙස තබා ඇත්තේ, සිලින්ඩරයේ අක්ෂය තලවල ඡේදන රේඛාවට සමාන්තර වන ලෙසට ය. සිලින්ඩරය මත , එය, එහි අක්ෂය වටා හැරවීමට යත්න දරණ ඝූර්ණය M වූ යුග්මයක් යොදා ඇත. සිලින්ඩරයේ බර W ද එහි අරය a ද ඝර්ෂණ කෝණය λ ද වෙයි නම්, සිලින්ඩරය ලිස්සායාමට ආසන්න ම මොහොතේ

$$M = \frac{1}{2} W a \sec \alpha \sin 2\lambda$$

බව පෙන්වන්න.

10. ABC නම් ත්‍රිකෝණාකාර ආස්තරයක් BC ජලමට්ටමේ පිහිටන ලෙස ද, h ගැඹුරක A පිහිටන ලෙස ද, සිරස්ව ජලයේ ගිල්වා ඇත. පීඩන කේන්ද්‍රය $\frac{h}{2}$ ගැඹුරක පිහිටන බව පෙන්වන්න.

BC, CA, AB පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් D, E, F වේ.

(i) AEF ත්‍රිකෝණය මත තෙරපුම = $BCEF$ ත්‍රපීසියම මත තෙරපුම බව ද

(ii) $DEAF$ සමාන්තරාස්‍රයේ පීඩන කේන්ද්‍රයේ ගැඹුර $\frac{7h}{12}$ බව ද

පෙන්වන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

11. (අ) විවෘත අර්ධ ගෝලීය පාත්‍රයක් සම්පූර්ණයෙන් ජලයෙන් පුරවා, පසුව පැතලි තහඩුවකින් වසා ඇත. පැතලි තහඩුව තිරස සමඟ α නම් සුළු කෝණයක් සාදන ලෙසට පද්ධතිය තබා ඇත්තේ, ජලයේ ඉහළම ලක්ෂ්‍යය, පාත්‍රයේ ගැටිය මත ලක්ෂ්‍යයක් වන ලෙසට ය. පාත්‍රයේ වක්‍ර පෘෂ්ඨය මත තෙරපුමේ විශාලත්වයත්, දිශාවත්, ක්‍රියා රේඛාවත් සොයන්න.

(ආ) විවෘත අර්ධ ගෝලීය පාත්‍රයක් එහි වෘත්ත ගැටිය තිරස් මේසයක් සමග ස්පර්ශ වෙමින් පවතින ලෙසට තබා ඇත. පාත්‍රයේ ශීර්ෂයේ වූ කුඩා සිදුරක් තුළින් පාත්‍රය පිරෙන තෙක් එය තුළට ජලය සෙමින් පුරවනු ලැබේ. පාත්‍රයේ බර යටත් පිරිසෙයින් එය තුළ ඇති ජලයේ බරෙන් අර්ධයක් වත් වෙයි නම් පාත්‍රය ඉහළ නොනගින බව පෙන්වන්න.

12. ද්‍රවස්ථිති විද්‍යාවේ එන ආකිමිඩීස් මූලධර්මය සඳහන් කොට සාධනය කරන්න.

$AB = AC$ වූ සම ද්විපාද ත්‍රිකෝණාකාර ABC හරස් කඩක් සහිත ඒකාකාර ලී ප්‍රිස්මයක්, එහි B හරහා වූ දාරය ජල මට්ටමේ පිහිටන ලෙසට ද, C හරහා වූ දාරය ජල මට්ටම ට පහළින් සිටින ලෙසට ද ජලයේ පාවේ.

(i) AC හරහා වන පෘෂ්ඨය තිරස් විය යුතු බව ද,

(ii) ප්‍රිස්මය සෑදී ඇති ලී වල විශිෂ්ට ගුරුත්වය $1 - \cos A$ බව ද

සාධනය කරන්න.

23-8-93