සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි]
All Rights Reserved]

18079

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව/Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1992 අගෝස්තු
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1992

(02) ව්‍යවහාරික ගණිතය II
(02) Applied Mathematics II

02
S | II

පැ තුනයි/*Three hours*

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

1. (i) $e^y\left(\frac{dy}{dx}+1\right) = 1$ අවකල සමීකරණය විසඳන්න.

(ii) v යනු x හි ශ්‍රිතයක් විට $y = vx$ යන්න

$$2x^2\frac{dy}{dx} + y^2 = x(x+2y)$$

අවකල සමීකරණය සපුරාලයි නම් $v(x-c) = x + c$ බව පෙන්වන්න. මෙහි c යනු අභිමත නියතයකි.

(iii) xOy තලයේ වක්‍රයක් කෙසේ ද යත් $P(x, y)$ ලක්ෂ්‍යයේ දී වක්‍රයේ අභිලම්බය Mහි දී x- අක්ෂයත් Nහි දී y - අක්ෂයත් ඡේදනය වන අතර $MP = PN$ වන පරිදි වෙයි. තව ද වක්‍රය $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන බව දී තිබෙයි. වක්‍රයේ සමීකරණය සොයන්න.

2. f නියත ත්වරණයෙකින් සෘජු රේල් පාරක ගමන් කරන l දිගැති දුම්රියකට $2V$ උපරිම වේගයක් ඇත. රේල් පාරට සමාන්තර පාරක, දුම්රිය යන දිශාවට ම ගමන් කරන මෝටර් රථයකට $2f$ නියත ත්වරණයකුත් $3V$ උපරිම වේගයකුත් තිබේ. ආරම්භයේ දී දුම්රියේ පසු පස කෙළවරත් මෝටර් රථයේ ඉදිරි පසත් එක එල්ලේ වන අතර දුම්රියේත් මෝටර් රථයේත් වේග පිළිවෙළින් V හා $\frac{1}{2}V$ වෙයි. දුම්රියත් මෝටර් රථයත් ඒවායේ උපරිම වේග ලබා ගන්නේ පිළිවෙලින් t_1 හා t_2 කාලවල දී ය. දුම්රියේ ඉදිරි පස හා මෝටර් රියේ ඉදිරි පස එක එල්ලේ පිහිටන්නේ $t_3 (> t_2)$ කාලයේ දී ය. දුම්රියේ චලිතයත් මෝටර් රථයේ චලිතයත් සඳහා ප්‍රවේග කාල වක්‍ර එක ම රූප සටහනක අඳින්න. ඒ නයින්, දුම්රියේ පසු පස කෙළවර, යළිත් වරක් t_1 කාලයේ දී මෝටර් රථයේ ඉදිරි පස සමඟ එක එල්ලේ පිහිටන බව අපෝහනය කරන්න.

$$t_3 = \frac{l}{V} + \frac{17V}{16f} \quad \text{බවත්}$$

$$3V^2 < 16fl \quad \text{බවත්}$$

පෙන්වන්න.

3. සමතල රේල් පාරක ගමන් කරන, ජවය කපා හැර ඇති දුම්රියක මන්දනය $k(v^2 + U^2)$ වෙයි. මෙහි v යනු වේගය ද k හා U යනු නියත ද වෙයි. ආරම්භයේ දී $v = 2U$ නම්, $\frac{1}{Uk}\tan^{-1}(\frac{1}{3})$ කාලයේ දී $\frac{1}{2k}\log_e\frac{5}{2}$ දුරක දී එහි වේගය අඩක් වන බව සාධනය කරන්න.

දැවනර $\frac{\pi}{4Uk}$ කාලයෙක දී තවත් $\frac{1}{2k}\log_e 2$ දුරක් ගමන් කළ පසු දුම්රිය නිශ්චලතාවට පැමිණෙන බව ද සාධනය කරන්න.

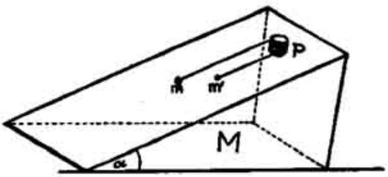
අනෙක් පිට බලන්න.

4. තොට u උපරිම වේගයක් සහිත Q නම් හොර බඩු බෝට්ටුවක් A පිහිටීමේ තිබෙයි. A ට දකුණු දෙසින් නැව් සැතැප්ම a දුරකින් වූ P මුර සංචාරක බෝට්ටුවක් තොට $v\ (> u)$ නියත ප්‍රවේගයෙකින් උතුරු දෙසට යාත්‍රා කරන බව ආරංචි විය. P හි ගමන් මග වෙනස් නොකළහොත්, P ගේ ගමන් මගට හැකි තාක් ඈතින් සිටීම සඳහා Q යාත්‍රා කළ යුතු දිශාව සොයන්න. මේ අවස්ථාවේ දී ඒවා අතර කෙටි ම දුර කොපමණ ද ?

තවත් අවස්ථාවක දී, v ප්‍රවේගයෙන් උතුරට ගමන් කරන P මුර සංචාරක බෝට්ටුව විසින්, නැව් සැතැප්ම b බටහිරින් පිහිටි Q හොර බඩු බෝට්ටුව, තොට $\sqrt{v^2 - u^2}$ ප්‍රවේගයෙකින් නැගෙනහිරින් දකුණට $\cos^{-1}\left(\dfrac{u}{v}\right)$ කෝණයක් සාදන දිශාවට යාත්‍රා කරනු දක්නා ලදී. ඇත්ත වශයෙන් ම Q බෝට්ටුව එහි u උපරිම වේගයෙන් ගමන් කරන බව පෙන්වන්න. එහි චලිතයේ දිශාව සොයන්න.

දැන් Q බෝට්ටුව තම ගමන් මාර්ගය වෙනස් නො කළහොත්, එය අල්ලා ගැනීම සඳහා, බටහිරින් උතුරට $\sin^{-1}\left(\dfrac{u^2}{v^2}\right)$ කෝණයක් සාදන දිශාවට P බෝට්ටුව ගමන් කළ යුතු බවත් පැය $\dfrac{bv}{\sqrt{v^2 - u^2}\,[\,u + \sqrt{u^2 + v^2}\,]}$ කාලයකට පසු අල්ලා ගැනීම සිදු වන බවත් පෙන්වන්න.

5. α ආනතියෙන් යුත් සුමට කුඤ්ඤයක් සුමට තිරස් මේසයක් මත තබා තිබෙයි. දෙ කෙළවරට m හා m' $(m > m')$ ස්කන්ධ ඇඳු $2l$ දිගැති ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක්, කුඤ්ඤයේ ඉහළ ආනත මුහුණතින් නෙරා තිබෙන කුඩා සුමට P නාදත්තක් වටා යවා ඇත. අංශු, කුඤ්ඤයේ මුහුණත සමඟ ස්පර්ශ වෙමින් පවතියි. ආරම්භයේ දී , අංශු එකක් අනෙකට ආසන්නව ද නාදත්තේ සිට l දුරකින් පිහිටන පරිදි ද තබා තිබෙයි. තන්තුවේ එක් එක් කොටස නොබුරුල් ව ද ආනත මුහුණතේ උපරිම බෑවුම් රේඛාවක ද පිහිටා ඇත. බරින් අඩු m' අංශුව P නාදත්ත වෙතට ඒමට පෙර කුඤ්ඤයේ ත්වරණය,



$$\frac{(m - m')^2\, g \sin\alpha \cos\alpha}{M\,(m + m') + 4\,mm' + (m - m')^2 \sin^2\alpha}$$

බව සාධනය කරන්න. මෙහි M යනු කුඤ්ඤයේ ස්කන්ධය යි. (P නාදත්තේ සිට කුඤ්ඤයේ පහළ දාරය තෙක් දුර $2l$ ට වැඩි බව උපකල්පන කළ යුතු ය.)

බරින් අඩු අංශුව නාදත්ත වෙත පැමිණෙන විට කුඤ්ඤය $\dfrac{l\,(m - m')\cos\alpha}{M + m + m'}$ දුරක් මේසය මත ගමන් කර ඇති බව අපෝහනය කරන්න.

6. එන්ජිමක්, 40 000 N ක නියත ප්‍රතිරෝධයකට එරෙහි ව සමතල රේල් පාරක $10\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ සතත වේගයකින් ගමන් කරයි. එන්ජිමේ ජව ප්‍රතිදානය, kW වලින් ගණනය කරන්න.

ඊ ළඟට එන්ජිම, සබැඳුම් දණ්ඩක් මඟින් දුම්රිය මැදිරියකට ඈඳන ලදී. මැදිරියේ චලිතයට නියත ප්‍රතිරෝධය 20 000 N කි. දැන් එන්ජිමේ ජව ප්‍රතිදානය 900 kW නම්, සමතල රේල් පාරක දුම්රියේ උපරිම වේගය $\mathrm{m\,s^{-1}}$ වලින් ගණනය කරන්න.

මේ අවස්ථාවේ දී, සබැඳුම් දණ්ඩේ ආතතිය නිව්ටන්වලින් කොපමණ ද?

පසු ව, දුම්රිය ඉහත ජව ප්‍රතිදානය ම, එනම් 900 kW ඇති ව එම නියත සර්ෂණ බලවලට එරෙහි ව තිරසට $\sin^{-1}\left(\frac{1}{50}\right)$ ආනතියක් සහිත බෑවුමක් ඉහළට යයි. දුම්රියේ මුළු ස්කන්ධය මෙට්‍රික් ටොන් 340 ක් නම්,

(i) $5\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ වේගයෙන් බෑවුම ඉහළට යන විට දුම්රියේ ත්වරණය $\frac{23}{85}\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ බවත්,

(ii) බෑවුම ඉහළට දුම්රියේ උපරිම වේගය $7\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ට යම්තම් වැඩි බවත්

පෙන්වන්න.

(ගුරුත්වජ ත්වරණය, g යන්න $10\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ ලෙස ද, මෙට්‍රික් ටොනය, 1000 kgට සමාන ලෙස ද ගන්න.)

7. A අභ්‍යාසය, තිරස සමඟ α $(\neq \frac{\pi}{2})$ කෝණයක් සාදන සරල රේඛාවක් ඔස්සේ U ඒකාකාර ප්‍රවේගයෙන් ඉහළ නඟියි. අභ්‍යාසය, පොළොවේ වූ අභ්‍යාස නාශක තුවක්කුවකට සිරස් ලෙස ඉහළින් h උසකින් පියාසර කරන මොහොතක දී V ප්‍රවේගයෙන් තිරය සමඟ θ කෝණයක් සාදන දිශාවකට තුවක්කුවෙන් S වෙඩිල්ලක් තබනු ලැබෙයි. වෙඩිල්ල අභ්‍යාසයේ වැදුණොත්, A ට සාපේක්ෂ ව S හි පෙත සැලකීමෙන් හෝ අන් අයුරකින් හෝ

(i) $V^2 > U^2 [1 + k^2 + 2k\sin\alpha]$ බවත්

(ii) $\tan\theta > k\sec\alpha + \tan\alpha$ බවත් පෙන්වන්න. මෙහි $k = \frac{\sqrt{2gh}}{U}$

$k > 1$ නම්, $\theta > \cos^{-1}\left(\frac{U}{\sqrt{2gh}}\right)$ බව අපෝහනය කරන්න.

8. A, B හා C යන අංශු තුනේ ස්කන්ධ පිළිවෙලින් m, $2m$ හා $2m$ වෙයි. AB හා AC ලුහු අවිතන්‍ය තන්තු මඟින් A අංශුව B ටත් C ටත් ඈඳා තිබෙයි. තන්තු නො බුරුල්ව ද BAC කෝණය $= 60°$ ද වන සේ පද්ධතිය සුමට තිරස් තලයක් මත තබා ඇත. $\overrightarrow{BA}$ දිශාවට A අංශුවට I ආවේගයක් යොදනු ලැබෙයි. අංශුවල ආරම්භක ප්‍රවේග සොයන්න. $\overrightarrow{BA}$ සමඟ $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{5}\right)$ කෝණයක් සාදන දිශාවකට A අංශුව චලනය වීමට පටන් ගන්නා බව පෙන්වන්න.

පද්ධතියට යොදන ලද චාලක ශක්තිය, m හා I ඇසුරෙන් සොයන්න.

9. එක හා සමාන සුමට කේවල ප්‍රත්‍යාස්ථ ගෝල දෙකක්, ඈල ව ගට්ටනය වෙයි ; ආරම්භයේ දී එක් ගෝලයක් නිශ්චලතාවේ පවතියි. ගට්ටනයෙන් පසු ඒවායේ පෙත් **සෘජුකෝණී** වන බව පෙන්වන්න.

එක එකක් 3 cm අරයෙන් යුත් එ වැනි S_1, S_2 ගෝල දෙකක කේන්ද්‍ර පිළිවෙලින් A, B ලක්ෂ්‍යවල වෙයි. මෙහි $AB = 16$ cm. ඒ හා සමාන තෙ වැනි S_3 ගෝලයක් AB ට සෘජුකෝණී ලෙස ප්‍රක්ෂේප කරන ලද්දේ පළමුවෙන් ම S_1 සමඟ ද ඊ ළඟට S_2 සමඟ ද ගැටෙන පරිදි ය. පළමු වැනි හා දෙ වැනි ගට්ටනවල දී S_3 හි කේන්ද්‍රය පිළිවෙලින් C හා C' ලක්ෂ්‍යවල පිහිට යි. S_3 ගේ චලිතයේ අවසාන දිශාව ද AB ට සෘජුකෝණී ලෙස වෙයි. CC' දුර සොයන්න. S_1, S_2, S_3 ගෝලවල අවසාන වේග 20 : 12 : 9 අනුපාතයෙන් වන බව පෙන්වන්න.

10. (අ) P ලක්ෂ්‍යයක්, xOy තලයේ චලනය වන්නේ කෙසේ ද යත් t කාලයෙක දී එහි පිහිටුම් දෛශිකය $\overrightarrow{OP} = (a\cos\omega t)\,\mathbf{i} + (a\sin\omega t)\,\mathbf{j}$ වන පරිදි ය. මෙහි a, ω යනු නියත ද $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ යනු පිළිවෙළින් Ox, Oy අක්ෂ ඔස්සේ වූ ඒකක දෛශික ද වෙයි. P ගේ පෙත වෘත්තයක් බව පෙන්වන්න. P ගේ ප්‍රවේගයේත් ත්වරණයේත් විශාලත්වය හා දිශාව සොයන්න.

තව ද, N යනු P සිට Ox අක්ෂයට ඇඳි ලම්බයේ අඩිය නම්, N සරල අනුවර්තී චලිතයෙක යෙදෙන බවත් එහි ආරම්භක පිහිටීමේ $(t = 0)$ සිට $P\hat{O}N =$ රේඩියන් α වන පරිදි වූ පිහිටීම තෙක් ගත වන කාලය $\frac{\alpha}{\omega}$ බවත් පෙන්වන්න.

(ආ) පෘථිවි පෘෂ්ඨය තුළ වූ වස්තුවක්, එහි සිට පෘථිවි කේන්ද්‍රයට ඇති දුරට අනුලෝම වශයෙන් සමානුපාතික බලයකින්, පෘථිවියේ කේන්ද්‍රය දෙසට ආකර්ෂණය වන්නේ යැයි උපකල්පනය කරමින්, වස්තුවක් පෘථිවි පෘෂ්ඨයේ සිට 32 km ගැඹුරු සිරස් වලක පතුළට වැටීමට ගත වන කාලය සඳහා සංඛ්‍යාත්මක ප්‍රකාශනයක් සොයන්න. (පෘථිවියේ අරය $= 6400$ km ලෙස ද ගුරුත්වජ ත්වරණය $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ ලෙස ද ගන්න.)

[අනෙක් පිට බලන්න.

11. සුමට පටු කුහර බටයක්, කේන්ද්‍රය O ද, අරය a ද වූ වෘත්තයෙක හැඩයට නමා එහි තලය සිරස් ව තිබෙන සේ සවි කර ඇත. පිළිවෙලින් ස්කන්ධය m හා km වන P හා Q අංශු දෙක, $\frac{\pi a}{2}$ දිගැති ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මඟින් ඈඳා බටය තුළ තබා ඇත්තේ O ට සිරස් ලෙස ඉහළින් P ද O හා එක ම මට්ටමක Q ද පිහිටන පරිදි ය. තන්තුව බටය තුළ වෙයි. $t = 0$ කාලයේ දී පද්ධතිය නිශ්චලතාවේ සිට මුදා හරිනු ලැබෙයි. t කාලයේක දී OP, උඩු සිරස සමඟ θ කෝණයක් සාදයි නම්, යාන්ත්‍රික ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මය උපයෝගී කර ගෙන, තන්තුව නො බුරුල් ව පැවතුනහොත්,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{g}{a(1+k)}(\sin\theta + k\cos\theta)$$

බව පෙන්වන්න. $0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{4}$ විට පමණක් ඉහත සමීකරණය වලංගු වන බව අපෝහනය කරන්න.

P අංශුව මත ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න. $k > 3 - 2\sqrt{2}$ නම් තන්තුව බුරුල් වීමට පෙර ප්‍රතික්‍රියාවේ දිශාව වෙනස් වන බව පෙන්වන්න.

12. ස්කන්ධය m ද පැත්තක් $2a$ ද වන $ABCD$ ඒකාකාර සමචතුරස්‍ර තහඩුවක, AB දරය වටා අවස්ථිති ඝූර්ණය අනුකලනය කිරීමෙන් සොයන්න.

තහඩුවේ කේන්ද්‍රය හරහා එහි තලයට ලම්බ අක්ෂයක් වටා තහඩුවේ අවස්ථිති ඝූර්ණය $\frac{2}{3}ma^2$ බව අපෝහනය කරන්න.

තහඩුව, සිරස් ලෙස අචල ව ඇති ඉහත සඳහන් අක්ෂය වටා Ω කෝණික වේගයෙකින් නිදහසේ භ්‍රමණය වෙයි. $\frac{2}{3}m$ ස්කන්ධයෙන් යුත් ස්ථාවර අංශුවක් තහඩුවේ A මුල්ල හා ගැටී තහඩුවේ ඇලෙයි. ඉන්පසු තහඩුවේ ඇති වන කෝණික වේගය සොයන්න. ගැටුම නිසා සිදු වන චාලක ශක්තියේ හානිය $\frac{2}{9}ma^2\Omega^2$ බව පෙන්වන්න.