

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව/Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, අගෝස්තු 1989
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1989

(01) ශුද්ධ ගණිතය I
(01) Pure Mathematics I

විෂය අංකය		
01	S	I

පැ තුනයි / Three hours

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

- (i) U_r යනු

$$\frac{1}{2} + \frac{1.4}{2.5} + \frac{1.4.7}{2.5.8} + \frac{1.4.7.10}{2.5.8.11} + \dots$$

අර්ථයෙහි r වෙනි පදය වේ.
 U_r ඇසුරෙන් U_{r+1} ප්‍රකාශ කරන්න.
 $f(r)$ යනු $f(r) - f(r-1) = U_r$ ද A හා B යනු නියතයන් ද වන $f(r) = (Ar + B) U_{r+1}$ වන
 ඇසුරින් U_r හි මූලයකි.
 A හා B හි අගයන් සොයා ඒ නයිත

$$\sum_{r=1}^n U_r = \frac{1}{2} \left\{ \frac{4.7.10 \dots (3n+1)}{2.5.8 \dots (3n-1)} - 1 \right\}$$

බව පෙන්වන්න.

(ii) n සෑහීම ධන නිඵලයක් සඳහා $3.5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ යන්න 17 ක් බෙදෙන බව ගණිත අභ්‍යුහනයෙන්
 සාධනය කරන්න.
 යථායන්ත ක්‍රමයක් මගින් ද ප්‍රතිඵලය ගොඩනගන්න.
- (i) ධන සංඛ්‍යා දෙකක සමාන්තර මධ්‍යන්‍යය ඒවායේ ඉහෙත්තර මධ්‍යන්‍යයට වඩා විශාල හෝ සමාන වන
 බව පෙන්වන්න.
 ඒ නයිත හෝ දත් ක්‍රමයකින් හෝ $n > r \geq 0$ නම්

$$\frac{(n+1)}{2} \geq \sqrt{(n-r)(r+1)}$$

බව සාධනය කරන්න.
 සෑහීම $n \geq 1$ නිඵලයක් සඳහා
 $(n+1)^n \geq 2^n n!$ බව අපෝහනය කරන්න.

(ii) a, b, c නියත වන $ax^2 + bx + c = 0$ සමීකරණයේ මූල වන α, β ඇසුරෙන්
 $acx^2 - b(c+a)x + (c+a)^2 = 0$ සමීකරණයේ මූල ප්‍රකාශ කරන්න.

(iii) $\frac{x^2 + 9x - 20}{x^2 - 11x + 30} \geq -1$ අසමානතාව සත්‍ය වන x හි අගය පරාසය සොයන්න.
- (i) $f(x) = 2x^4 + (3k-4)x^3 + (2k^2-5k-5)x^2 + (2k^3-2k^2-3k-6)x + 6$ හි $x^2 - k$
 සාධකයක් වන පරිදි k හි අගයන් සොයන්න.
 k හි එක් එක් අගයට අනුරූප $f(x)$ හි ඉතිරි සාධක සොයන්න.

(ii) $x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy = \frac{1}{2} \{ (y-z)^2 + (z-x)^2 + (x-y)^2 \}$ බව පෙන්වන්න.
 $x = b+c-a, y = c+a-b, z = a+b-c$, නම්
 $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 4(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$ බව අපෝහනය කරන්න.

4. ධන පූර්ණ සංඛ්‍යාමය දර්ශකයක් සඳහා ද මූලධර්ම ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කරන්න.
 $z = \cos \theta + i \sin \theta$ නම් n ධන නිඛිලයක් සඳහා:

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos n\theta \text{ සහ } z^n - \frac{1}{z^n} = 2i \sin n\theta \quad \text{බව පෙන්වන්න.}$$

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^8 \text{ සහ } \left(z - \frac{1}{z}\right)^8 \text{ හි ප්‍රසාරණයන් සැලකීමෙන්}$$

$$(අ) 64(\cos^8 \theta + \sin^8 \theta) = \cos 8\theta + 38 \cos 4\theta + 35,$$

$$(ආ) 8(\cos^8 \theta - \sin^8 \theta) = \cos 6\theta + 7 \cos 2\theta \text{ බව පෙන්වන්න.}$$

$$\cos 6\theta = -7 \cos 2\theta \text{ සමීකරණයේ සාධාරණ වියදම් සොයන්න.}$$

5. P_0, P_1 සහ P_2 ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙලින් z_0, z_1 සහ z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරනු ලැබේ.

$$\frac{P_0 P_2}{P_1} = \lambda > 0 \text{ නම් හා } \angle P_1 P_0 P_2 = \theta \text{ නම්}$$

$(z_2 - z_0)$ සහ $(z_1 - z_0)(\cos \theta + i \sin \theta)$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරනු ලබන ලක්ෂ්‍ය ලබා ගැනීම සඳහා ජ්‍යාමිතික නිරූපණ ඉදිරිපත් කර $z_2 = z_0 + \lambda (z_1 - z_0)(\cos \theta + i \sin \theta)$ බව අපේක්ෂනය කරන්න; මෙහි θ ව්‍යාධර්ම අතර මූල අගය.

A, B, C, D, E, F ශීර්ෂ ව්‍යාධර්ම අතර ගන්නා ලද $ABCDEF$ සටහනේ සටහනක A සහ B ශීර්ෂ පිළිවෙලින් $2 + 2i$ සහ $3 + 3i$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරනු ලැබේ. ඉහත ප්‍රතිඵලය උපයෝගී කරගනිමින් E සහ F ශීර්ෂ මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා සොයන්න.

6. (i) රාක්කයක එකිනෙකින් වෙනස් පොත් 16 ක් තිබෙන අතර 3 ක් විචල්‍යතාවය, 4 ක් කලනය, 3 ක් ජ්‍යාමිතිය සහ අනෙක්වා ශ්‍රීකෝණමිතිය වේ. කොපමණ ආකාර වලින් පොත් පිළියෙල කර තැබිය හැකි ද? එක එකක් විෂයව අයත් පොත් එකට සිටින පේ තබන විට පිළියෙල කිරීම සංඛ්‍යාව ද සොයන්න.

$$(ii) (5\sqrt{2} + 7)^{\frac{1}{3}} - (5\sqrt{2} - 7)^{\frac{1}{3}} \text{ යන්න 2 ට සමාන බව පෙන්වන්න.}$$

7. ධන පූර්ණ සංඛ්‍යාමය දර්ශකයක් සඳහා ද්විපද ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න.

$$(අ) x = \frac{1}{2} \text{ වන විට, } \left(\frac{1}{2} + x\right)^9 \text{ හි } x \text{ වල ආරෝහණ බල වලින් යුත් ප්‍රසාරණයේ වැඩිතම පදයෙහි අගය සොයන්න.}$$

$$(ආ) (1 + x)^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n \text{ නම් } c_r/c_{r-1} \text{ හි අගය සොය}$$

$$r (c_r + c_{r-1}) = (n + 1) c_{r-1} \text{ බව පෙන්වන්න.}$$

එ නමින්

$$c_0 + 3c_1 + 5c_2 + \dots + (2n + 1) c_n = 2^n (n + 1)$$

බව සාධනය කරන්න.

8. (i) $\frac{\sin x}{x}$ හි ව්‍යුත්පන්නය ප්‍රමුලධර්ම වලින් සොයන්න.

(ii) පහත දැක්වෙන දස x විෂයයෙන් අවකලනය කර මෙහි ප්‍රතිඵලය සරලම ආකාරයෙන් දෙන්න.

$$\cos^{-1} \left(\frac{a \cos x + b}{b \cos x + a} \right); \text{ මෙහි } a \text{ සහ } b \text{ යනු නියත වේ.}$$

(iii) y යනු x හි ශ්‍රිතයක් වන අතර $x = \tan \theta$ වේ.

$$\frac{dy}{d\theta} \text{ සහ } \frac{d^2y}{d\theta^2} \text{ ඇසුරෙන් } \frac{d^2y}{dx^2} \text{ ප්‍රකාශ කරන්න.}$$

$$(1 + x^2)^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x(1 + x^2) \frac{dy}{dx} + y = 0 \text{ නම්}$$

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} + y = 0 \text{ බව සාධනය කරන්න.}$$

9. කොටස් වශයෙන් අනුකලනය උපයෝගී කරගනිමින්

$$\int \sin(\log x) dx \text{ අගයන්න.}$$

r නියතයක් වන

$$I = \int x^r \sin(\log x) dx \text{ සහ } J = \int x^r \cos(\log x) dx$$

නම්

$$\left(1 + \frac{r}{2}\right) I - \frac{r}{2} J = \frac{x^{r+1}}{2} \{ \sin(\log x) - \cos(\log x) \} + \text{නියතයක්}$$

බව සාධනය කරන්න.

$x^{r+1} \sin(\log x)$ අවකලනය කිරීමෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් I සහ J අතර තවත් යම්බන්ධයක් ලබාගෙන

$$I = \frac{x^{r+1}}{r^2 + 2r + 2} \{ (r+1) \sin(\log x) - \cos(\log x) \} + \text{නියතයක්}$$

බව අපෝහනය කරන්න.

ඒ නමින් a සහ b නියත වන $\int e^{ax} \sin bx dx$ අගයන්න.

10. (i) $\int_a^b f(x) dx$ නිශ්චිත අනුකලය නිමානය කිරීම සඳහා සිම්ප්‍රන් නීතිය ප්‍රකාශ කරන්න.

ඊට අනුව උපයෝගී කරගනිමින් සිම්ප්‍රන් නීතිය මගින් $\int_{1.00}^{1.30} \sqrt{x} dx$ අනුකලය අගයන්න.

x	1.00	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30
\sqrt{x}	1.00000	1.02470	1.04881	1.07238	1.09544	1.11803	1.14017

- (ii) $f(x) = \log(1+x+x^2)$ නම්

$$(1+x+x^2) f'(x) = 1+2x \text{ බව පෙන්වන්න.}$$

ඒ නමින් $n = 2, 3, 4, 5$ සඳහා $x = 0$ දී $f(x)$ හි n වැනි ව්‍යුත්පන්නයෙහි අගය වන $f^{(n)}(0)$ සොයන්න.

x^5 සඳහා දක්වා $f(x)$ හි මැක්ලෝරින් ප්‍රසාරණය ලබාගන්න.

11. $x = 2a \cos \theta - a \cos 2\theta$
 $y = 2a \sin \theta - a \sin 2\theta \quad 0 \leq \theta \leq \pi$

පරාමිතික සමීකරණ මගින් දෙනු ලබන චක්‍රය අනුපේධනය කරන්න.

ඉහත සමීකරණ දෙකින් θ ඉවත් කර x සහ y අතර සම්බන්ධතාවයක් ලබාගන්න.

මෙම සම්බන්ධය මගින් නිරූපණය කරන චක්‍රය පරාමිතික සමීකරණ මගින් නිරූපණය කරනු ලබන චක්‍රයෙන් වෙනස් වන්නේ කෙසේ ද?

12. $x^2 = 4y$ සහ $x^2 = y^3$ චක්‍ර වල කටු සටහන් එකම රූපයක අදින්න.

ප්‍රථම වෘත්තසාදය තුළ මෙම චක්‍ර දෙක මගින් අන්තර්ගත කරනු ලබන S වර්ගඵලය සොයන්න.

S සාප්‍රකෝණ හතරකින් (අ) x - අක්ෂය (ආ) y - අක්ෂය වටා භ්‍රමණය කිරීමේදී ජනනය වන පරිමාව සොයන්න.