

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව/Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, අගෝස්තු 1989
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1989

(02) ව්‍යවහාරික ගණිතය II
(02) Applied Mathematics II

විෂය අංකය		
02	S	II

පැතුනයි/Three hours

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

1. (i) $x = 0$ වට $y = 0$ යයි දී ඇති විට $\frac{dy}{dx} = -e^{x+y}$ අවකල සමීකරණයේ විසඳුම සොයන්න.

(ii) $\frac{dy}{dx} - y \ln x = 0$ අවකල සමීකරණය විසඳා

$x = 1$ හි දී $y = 1$ අවශ්‍යතාව සපුරා ලන ව්‍යාප්තික විසඳුම සොයන්න.

(iii) $\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} + \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1}$ අවකල සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම සොයන්න.

එය සමහරවිට පරාවල කුලයක් නිරූපණය කරන බව පෙන්වන්න.

$$\left[\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = -\ln(\sqrt{1+u^2} - u) \text{ ප්‍රථමලය ඔබට උපයෝගී කර ගත හැක.} \right]$$

2. A ට මීටර 380 ක් ඇතිත් B ද B ට කිලෝමීටර 1.96 ක් ඇතිත් C ද වන අයුරින් සෘජු ධාවන පර්යන්ත මත A, B, C ක අසු කුනක් පිහිටා ඇත. ඒකාකාර ත්වරණයකින් චලනය වන X නම් රථයක් A සිට B ට ගමන් කිරීමට මිනිත්තු 1 ක් ද B සිට C ට ගමන් කිරීමට මිනිත්තු 2 කක් ද ගනී. එහි ත්වරණය කන්පරයට කන්පරයට මීටර වලින් සොයා C හි දී එහි වේගය තන්පරයට මීටර 23 ක් බව පෙන්වන්න.

තන්පරයට තන්පරයට මීටර $\frac{1}{2}$ ක ඒකාකාර ත්වරණයෙන් චලනය වන Y නම් දෙවෙනි රථයක් X ට වඩා තන්පර 10 යක් හලින් C පසුකර යනු ලබන අතර එවිට එහි වේගය තන්පරයට මීටර $\frac{109}{7}$ වේ. Y පසුකර X යන්නේ කොපමණ දී දැයි සොයන්න.

3. ස්කන්ධයන් පිළිවෙලින් m, M වන P සහ Q අංශු එක එකක් u වේගයෙන් O ලක්ෂ්‍යයක සිට ආරම්භකර සරල රේඛාවක් ඔස්සේ චලනය වේ. O දෙසට දිශ්ටි ගත $\lambda > 0$ නියතයක් වන λm බලයක් P මත ක්‍රියා කරනු ලබන අතර O දෙසට ම වූ μMy විශාලත්වයෙන් යුත් බලයක් Q මත ක්‍රියා කරනු ලැබේ; මෙහි $\mu > 0$ නියතයක් සහ y යනු O සිට Q ට ඇති දුර වේ. O දෙසට ආපසු ආරම්භ කිරීමට ප්‍රථම P සහ Q දෙකම එකම a දුරක් පිළිවෙලින් t_p සහ t_q කාලවලින් සමීපුර්ණ කරයි නම්

$$t_p : t_q = 4 : \pi \text{ බව පෙන්වන්න.}$$

O සිට b දුරින් පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් පසු කරන විට P සහ Q හි වේග පිළිවෙලින් v_p සහ v_q නම් එවිට

$$v_p : v_q = \sqrt{a} : \sqrt{a+b} \text{ බව ද පෙන්වන්න.}$$

P සහ Q දෙකම O සිට පිටත්වීම හා O ට ආපසු පැමිණීම අතර එකම කාලයක් ගනී නම් O සිට ඒවායේ උපරිම දුරවල අනුපාතය සොයන්න.

4. තිරස් සුමට මේසයක් මත සිටුවා ඇති කුහඳකැසක සුමට බැවුම් මුහුණත සමඟ ස්කන්ධය m වන අංශුවක් ස්පර්ශව පවතී. කුහඳකැසේ ස්කන්ධය M වන අතර බැවුම් මුහුණත තිරස්ව α කෝණයකින් ආනත වේ.

පද්ධතිය තිස්වලතාවේ සිට මුහුරි නම් කුහඳකැසේ ක්වරණය $\frac{mg \sin \alpha \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha}$ බව පෙන්වන්න.

කුහඳකැසේ මුහුණත ඔස්සේ s දුරක් අංශුව වලනය වන කාලය තුළ දී කුහඳකැස d දුරක් වලනය වේ නම්

$$\left(1 + \frac{M}{m}\right) d = s \cos \alpha \quad \text{බව පෙන්වන්න.}$$

කුහඳකැස සහ මේසය අතර ප්‍රතික්‍රියාව

$$\frac{M(M+m)g}{M+m \sin^2 \alpha} \quad \text{බව ද පෙන්වන්න.}$$

5. ස්වකීය එන්ජිම ක්ලෝලවීමේ P වලින් ක්‍රියාකරවමින් පැයට ක්ලෝමීටර u නියත වේගයෙන් ස්කන්ධය ක්ලෝග්‍රෑම් M වන රථයක් තැවීතලා මාර්ගයක වලනය වේ. රථය නිරවද්‍ය R නියත ප්‍රතිරෝධයකට භාජනය වේ නම් $R = 3600 Pu^{-1}$ බව පෙන්වන්න.

එන්ජිම දැන් අසම්බද්ධව කර තිරිංග යොදනු ලබන අතර මීටර s දුරක දී රථය තිස්වලතාවට පැමිණේ. මුළු ප්‍රතිරෝධය d අග්‍රහිතව පවතී යයි උපකල්පනය කරමින් තිරිංගවල තේඳන බලය

$$\left(\frac{25}{648}\right) Ms^{-1} u^2 - 3600 Pu^{-1} \quad \text{බව පෙන්වන්න.}$$

එන්ජිම තවමත් අසම්බද්ධව ඇත්නම් එම ප්‍රතිරෝධයම සහ තිරිංග බලය ක්‍රියා කරන විට පැයට ක්ලෝමීටර u වලින් ආරම්භ කරමින් ක්ෂණිකව තිසලවීමට පළමුව රථය ආනතිය $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ වූ කන්දක 25 cm^2 ($25 \text{ cm}^2 + 648 \text{ gs}$) $^{-1}$ දුරක් ඉහළට දුවන බව පෙන්වන්න.

6. නැවක් පැයට ක්ලෝමීටර 30 කින් බටහිරට යාත්‍රා කරන අතර දෙවන නැවක් පැයට ක්ලෝමීටර 20 කින් දකුණට යාත්‍රා කරයි. පළමු නැවේ නැවියන්ට තුන්වෙනි නැවක් හිතීමකට දිශාවේ යාත්‍රා කරන්නා සේ පෙනෙන අතර දෙවෙනි නැවේ නැවියන්ට එය උතුරෙන් බටහිරට 60° ක දිශාවේ යාත්‍රා කරන්නා සේ පෙනේ. තුන්වෙනි නැවේ දකුණෙන් බටහිරට 75° දිශාවේ යාත්‍රා කරන බව පෙන්වා එහි වේගය සොයන්න.

7. සමාන අරයන්ගෙන් යුත් A, B සහ C ගෝල තුනක ස්කන්ධ පිළිවෙලින් $m, 2m$ සහ $3m$ වේ. ගෝල A සහ C අතර B සිටින සේ ද එවැනි කේන්ද්‍ර සරල රේඛාවක සිටින සේ ද තිරස් සුමට මේසයක් මත තිස්වල තාවයේ පවතී. කේන්ද්‍රයන්ගේ රේඛාව ඔස්සේ B දෙසට A ගෝලයට u ප්‍රවේගයක් දෙනු ලැබේ. ගෝල එක් එක් යුගලය අතර ප්‍රත්‍යාගති සංඛණකය e නම්

- (i) B සමඟ ගැටුණු විනාම A හි වේගය සහ
- (ii) C සමඟ ගැටුණු විනාම B හි වේගය සොයන්න.

$$e > \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{නම්, } B \text{ සමඟ } A \text{ දෙවන වරකට නොගැටෙන බව පෙන්වන්න.}$$

8. නො ඇදී දිග l සහ ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාර්ගයක W වන සැතැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක් මගින් බර W වන P අංශුවක් O අචල ලක්ෂ්‍යයකින් එල්ලා ඇත. විස්තාරය $2a$ වන සිරස් දෝලන P විසින් සාදනු ලබයි නම් t කාලයේ දී O සිට එහි දුර $2\left(1 + a \sin t \sqrt{\frac{1}{g}}\right)$ බව පෙන්වන්න; මෙහි කාලය මැන ඇත්තේ P ස්වකීය සමතුලිත පිහිටුමේ ඇති මොහොතේ සිට වේ.

ස්වකීය සමතුලිත පිහිටුමේ සිට අංශුව ඉහළ නඟන විට එය සමාන බරින් යුත් වෙනත් අංශුවක් අනුලා ගතී නම් දෝලනයේ විස්තාරය $\sqrt{12 + 2a^2}$ වන බව ද පෙන්වන්න.

9. ගෝලයක් පන්දුවකට පහර දෙනු ලබන්නේ එය තිරස්ව රේඛිත θ ආරෝහණයක් ඇතිව තත්පරයට මීටර u වේගයෙන් පොළොව මත පිහිටි P ලක්ෂ්‍යයකින් පිටත්වන ලෙසට ය. පන්දුවේ තිරස් පරාසය $g^{-1} u^2 \sin^2 \theta$ බව ද එළඹෙන උපරිම උස $\frac{1}{2} g^{-1} u^2 \sin^2 \theta$ බව ද පෙන්වන්න.

P හා එකම මට්ටමේ පිහිටි තණ නිල්ලක් මත පන්දුව වැටේ නම් ද පන්දුව තණ නිල්ලට වැටිය හැකි ආසන්නතම සහ දුරතම ලක්ෂ්‍යයන් පිළිවෙලින් P හි සිට මීටර $\frac{\sqrt{3}}{2} g^{-1} u^2$ සහ මීටර $g^{-1} u^2$ නම් $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ බව පෙන්වන්න.

තණ නිල්ල මතම වැටෙන පරිදි පන්දුව වැටේ නම් පන්දුවට සේන්ද්‍ර විය හැකි උපරිම උස සොයන්න.

10. දිග l වූ සැතැල්ලු අභිනාන තන්තුවක් R නම් කුඩා සුමට අචල මුදුවක් තුළින් ගමන් කරයි. ස්කන්ධයන් m සහ λm ($\lambda > 1$) වන P සහ Q අංශුන් තන්තුවේ කෙළවරට ගැටී ගත හැක. කේන්ද්‍රය ලෙස ඇති C ලක්ෂ්‍යයක් වටා ω නියත කෝණික ප්‍රවේගයකින් P අංශුව තිරස් වෘත්තයක් මඟට යයි. R ට සිරස් ලෙස පහළින් C පිහිටයි නම් හා C හි දී Q නිස්වලතාවේ පවතී නම්

$$(i) \omega^2 = \frac{g(1+\lambda)}{l} \quad \text{සහ}$$

$$(ii) \text{තන්තුව මුදුව මත } mg \sqrt{2\lambda(1+\lambda)} \text{ විභාජනවශයෙන් යුත් බලයක් යොදන බව පෙන්වන්න.}$$

11. ස්කන්ධය m වන P අංශුවක් අභ්‍යන්තර දුරය a සහ කෝණය O වන අවල කුහර ගෝලයක සුමට අන්තඃ පෘෂ්ඨය මත සිරස් වෘත්තයක වලනය වේ; වෘත්තයේ කලය O හරහා යනු ලැබේ. අංශුව u තිරස් ප්‍රවේගයකින් ගෝලයේ පහළම ලක්ෂ්‍යයේ සිට ප්‍රක්ෂේපණය කරනු ලැබේ. OP රේඛාව C හි සිරස් සමඟ θ කෝණයක් සාදන විට අංශුවේ ප්‍රවේගය v ද අංශුව සහ ගෝලය අතර ප්‍රතික්‍රියාව R ද නම්

$$v^2 = u^2 - 2ag (1 + \cos \theta) \quad \text{සහ}$$

$$R = \frac{m}{a} \left\{ u^2 - ag (2 + 3 \cos \theta) \right\}$$

බව පෙන්වන්න.

$u^2 = (2 + \sqrt{3}) ag$ නම් $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ නැත දී අංශුව ගෝලයෙන් ඉවත් වන බව ද එහි පරාවක්‍රය O හරහා යන බව ද පෙන්වන්න.

12. ස්කන්ධය M සහ පෘඪයක් $2a$ වන ඒකාකාර සමචතුරස්‍රාකාර තහඩුවක දරයක් වටා අවස්ථිති සුරණය $\frac{4Ma^2}{3}$

බව පෙන්වන්න.

ස්කන්ධය M සහ පෘඪයක් $2a$ වන ඒකාකාර සමචතුරස්‍රාකාර තහඩුවකට, තහඩුවේ දරයක් ඔස්සේ යන අවල සුමට තිරස් අක්ෂයක් වටා හුමණය වීමට නිදහස ඇත. තහඩුව නිශ්චලතාවේ එල්ලී ඇති විට තහඩුවේ කලයට ලම්බ දිශාවකට $\sqrt{20ag}$ ප්‍රවේගයෙන් වලනය වන ස්කන්ධය $\frac{M}{3}$ වන අංශුවක් ස්වකීය කෝණයකින් දී තහඩුවේ වටිනා අතර එය තහඩුව තුළට කැවැදීය.

- (i) තහඩුව සමඟ වැද්දු වහාම අංශුවේ වේගය $\sqrt{\frac{4ag}{5}}$ බව ද,
- (ii) හැඩුම නිසා වාලක කෝණයේ භාගික භානිය $\frac{4}{5}$ බව ද,
- (iii) ක්ෂණිකව නිශ්චලතාවට පැමිණීමට පෙර තහඩුව රේඛීය $\frac{4}{5}$ කෝණයකින් හැරෙන බව ද පෙන්වන්න.