

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව/Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, අගෝස්තු 1989
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1989

(02) ව්‍යවහාරික ගණිතය I
(02) Applied Mathematics I

විෂය අංකය		
02	S	I

පැ තුනයි/Three hours
ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

1. O, A, B යනු $\vec{OA} = \mathbf{a}, \vec{OB} = \mathbf{b}$ වන අයුරින් එකම සරල රේඛාවක් මත නොපිහිටි ලක්ෂ්‍ය වේ. P සහ Q යනු $\vec{OQ} = \frac{\mathbf{a}}{2}$ සහ $\vec{QP} = \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|} \mathbf{b}$ වන අයුරින් වූ ලක්ෂ්‍ය වේ. \vec{OP} සහ \vec{PA}, \mathbf{a} සහ \mathbf{b} ඇසුරෙන්

ප්‍රකාශ කර $\mathbf{a} = \vec{OP} + \vec{PA}, \mathbf{b} = \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|} (\vec{OP} - \vec{PA})$

බව අපෝහනය කරන්න.

R යනු $AR : RB = |\mathbf{a}| : |\mathbf{b}|$ වන අයුරින් AB මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් යයි දී ඇත්නම් \vec{OR} සොයන්න. ඒ නගින්න

- (i) O, P, R එකම සරල රේඛාව මත පිහිටන බවත්,
- (ii) $2|\vec{OP}| > |\vec{OR}|$ බවත්, පෙන්වන්න.

2. (i) \mathbf{a} සහ \mathbf{b} දෛශික දෙකක අදිය භූමිකය අර්ථ දක්වන්න. ත්‍රිකෝණයක උඩවයන් ඒකලක්ෂ්‍ය බව පෙන්වන්න.

(ii) \mathbf{a} සහ \mathbf{b} යනු නිශ්චාත, සමාන්තර නොවන සහ $\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} = \mathbf{0}$ වන දෛශික දෙකක් නම් $\alpha = 0, \beta = 0$ බව පෙන්වන්න.

ABC ත්‍රිකෝණයක B, C කෝණවල අභ්‍යන්තර කෝණ සමමතකය O හිදී හමු වේ. O ලක්ෂ්‍යය දෛශිකයන්ගේ මූලය ලෙස ගනිමින් \vec{OB} සහ \vec{OC} ,

$$\vec{OB} = \mathbf{b} = \lambda \left(\frac{\mathbf{a} - \mathbf{b}}{c} + \frac{\mathbf{c} - \mathbf{b}}{a} \right)$$

$$\vec{OC} = \mathbf{c} = \mu \left(\frac{\mathbf{b} - \mathbf{c}}{a} + \frac{\mathbf{a} - \mathbf{c}}{b} \right)$$

ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න; මෙහි λ, μ අදිය වන අතර a, b, c යනු ත්‍රිකෝණයේ පාද වේ.

$$\lambda^{-1} = -\frac{a+b+c}{ac}, \mu^{-1} = -\frac{a+b+c}{ab}$$

බව පෙන්වන්න. ඒ නගින්න කෝණ සමමතකය ඒක ලක්ෂ්‍ය බව පෙන්වන්න.

3. A, B, C ලක්ෂ්‍යවල පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින්

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\sqrt{2}\mathbf{k} \\ \mathbf{b} &= 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\sqrt{2}\mathbf{k} \\ \mathbf{c} &= 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\sqrt{2}\mathbf{k} \end{aligned}$$

- (i) A, B සහ C මගින් නිර්ණය කරන ලද කලයට පුලුඹ ඒකක අභිලම්භ දෛශිකයක්,
- (ii) $A, B,$ සහ C මගින් නිර්ණය කරන ලද කලය සඳහා සමීකරණයක්
- (iii) \vec{AB} සහ \vec{AC} අතර කෝණය
- (iv) A, B සහ C ශීර්ෂයන් වන ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය සොයන්න.

4. ඒකාකල බල n වලින් යුත් පද්ධතියක i වෙනි බලයේ සංරචක සෘජු කෝණාසාකාර අවල අක්ෂ සලකාසක දිශාවන්හි (X_i, Y_i) වන අතර එහි යෙදුම් ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක (x_i, y_i), $i = 1, 2, \dots, n$ වේ. පද්ධතිය තනි බලයකට තුල්‍ය වේ නම් මෙම බලයේ ක්‍රියා රේඛාවේ සමීකරණය

$$ax + by + c = 0 \text{ බව පෙන්වන්න; මෙහි}$$

$$a = \sum_{i=1}^n Y_i, \quad b = - \sum_{i=1}^n X_i \text{ සහ}$$

$$c = \sum_{i=1}^n (y_i X_i - x_i Y_i) \text{ වේ.}$$

P, Q යනු නියතයන් සහ θ යනු සරාජීතියක් වන ($P \cos \theta, P \sin \theta$) සහ ($-Q \sin \theta, Q \cos \theta$) විචල්‍ය බල දෙකක් පිළිවෙලින් ($a, 0$) සහ ($-a, 0$) ලක්ෂ්‍යවල දී ක්‍රියා කරනු ලැබේ. පද්ධතිය තනි බලයකට තුල්‍ය වන බව පෙන්වා මෙම බලයේ ක්‍රියා රේඛාව සොයන්න. රේඛාව අවල ලක්ෂ්‍යයක් හරහා යන බව පෙන්වන්න.

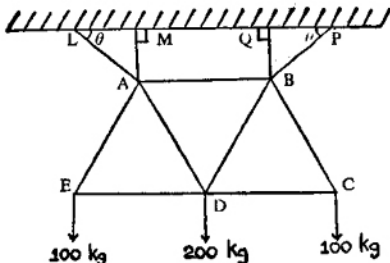
5. දෘඩ වස්තුවක් පියල්ල ම සමාන්තර තොටු ක්‍රියා රේඛාවක් සහිත ඒකාකල බල තුනක ක්‍රියාව යටතේ සම්තුලිතතාවේ වෙනස් නම් එවිට ඒවායේ ක්‍රියා රේඛා ඒක ලක්ෂ්‍ය විය යුතු බව පෙන්වන්න.

අරය $\sqrt{3} a$ වන සුමට අර්ධ ලෝලාකාර අවල පාත්‍රයක ගැටිය ලැබීය යන දිග $4a$ වන ඒකාකාර බර දණ්ඩක් එක කෙළවරක් පාත්‍රයේ පෘෂ්ඨය ස්පර්ශ කෙරීන් නිසලව ඇත. පාත්‍රයේ ගැටිය තිරස්ව පිහිටයි නම් තිරසව දණ්ඩේ අනන්‍ය රේඛීයත $\frac{\pi}{3}$ බව පෙන්වන්න.

6. එක එකක දිග $2a$ සහ බර W වන AB, BC සහ CD ඒකාකාර දඬු තුනක් B සහ C හි දී නිදහස් ලෙස සන්ධි කර ඇත. BC තිරස්ව ද AB හා CD එක එකක් සුමට අවල තාදත්තක ආධාරය ඇතිව ද පද්ධතිය සම්තුලිත ව තිසලතාවේ ඇත. එකිනෙකට $2c$ දුරකින් එකම තිරස් මට්ටමක තාදත් පිහිටා ඇත. AB සිරයට α කෝණයකින් ආනත වන බව පෙන්වන්න; මෙහි $\sin \alpha = \left[\frac{3(c-a)}{2a} \right]^{\frac{1}{3}}$ වේ.

B හිදී ප්‍රතික්‍රියාව සොයා එය තිරස සමග $\tan^{-1} \left[\frac{1}{3} \tan \alpha \right]$ කෝණයක් සාදන බව පෙන්වන්න.

7.



A, B, C, D, E හි දී සුමට ලෙස සන්ධි කරන ලද සමාන සැහැල්ලු දඬු හතකින් යුත් $ABCDE$ රාමුසැකිල්ලක් රූපය විස්තර කරයි. C, D, E සන්ධිවලට පිළිවෙලින් බර $100 \text{ kg}, 200 \text{ kg}, 100 \text{ kg}$ වූ භාරයන් තුනක් ඇදූ ඇති අතර පිළිවෙලින් A සහ B හරහා යන LAM, PBQ සමාන සැහැල්ලු සුමට තන්තු දෙකක් මගින් රාමු සැකිල්ල පිළිමෙහි එල්ලා ඇත්තේ AB තිරස් වන අයුරිනි. තන්තුවේ ආනතිය සොයන්න.

ප්‍රත්‍යාවල රූපයක් සටහන් කර දඬුවල ප්‍රත්‍යාවල, θ කෝණය ඇසුරෙන් සොයන්න.

$\theta \leq 30^\circ$ නම් AB දණ්ඩේ ප්‍රත්‍යාවලය අනෙක් දඬුවල ප්‍රත්‍යාවලවලට වඩා වැඩි වන බව පෙන්වන්න.

8. අරය සෙන්ටිමීටර r වූ ද, බර නිව්ටන් W වූ ද ඒකාකාර ලෝලයක ස්වකීය පෘෂ්ඨය මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකට සැහැල්ලු අවිභන්‍ය තන්තුවක් ඇඳ ඇත. තන්තුවේ අනෙක් කෙළවර සිරස් රේඛිතියක් මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකට සවිකර ඇත. අවල ලක්ෂ්‍යයට පහළින් සෙන්ටිමීටර $\frac{3}{2}r$ දුරකින් පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක දී තන්තිය ස්පර්ශ කරමින් ගෝලය සම්තුලිතව තිසලතාවේ ඇත. තන්තිය සමග ගෝලයේ ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යය යටි අතට ලිස්සා ගැටව සුදුසුම ඇත්නම් භා ගෝලය සහ තන්තිය අතර සර්ඝණ සංගුණකය $\frac{3}{4}$ නම් සිරසට තන්තුවේ ආනතිය සොයන්න.

තන්තුවේ ආනතිය නිව්ටන් $\frac{5W}{6}$ බව පෙන්වන්න.

9. $y^2 = 4ax$ සහ $x = a$ ප්‍රස්ථාර මගින් සපර්යන්ත පෙදෙස $x -$ අක්ෂය වටා පරිභ්‍රමණය කිරීමෙන් ජනනය වන ඒකාකාර සතයේ ඉරාත්ව කේන්ද්‍රය $\left(\frac{2a}{3}, 0 \right)$ හි පිහිටන බව පෙන්වන්න.

බර $9W$ වන එවැනි සතයක් බර $4W$ සහ අරය $2a$ වන ඒකාකාර සත අර්ධගෝලයකට සම්බන්ධ කර ඇත්තේ සතයේ තල මුහුණත අර්ධ ගෝලයේ තල මුහුණත සමග සම්පාත වන අයුරිනි. අර්ධ ගෝලයේ චක්‍රාකාර පෘෂ්ඨය මත ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක් තිරස් තලයක් සමග ස්පර්ශ වන ලෙස එලික සතයට සම්තුලිතව තිසලතාවේ පැවතිය හැකි බව පෙන්වන්න.

10. පෘත්තක් a වන විවෘත සන්නාහාර වෑංකියක් සම්පූර්ණ ලෙස, සන්නත්වය ρ වන සමජාතීය ද්‍රවයකින් පුරවා ඇත. පෘත්තක් a වන $ABCD$ නම් සම්වකුරු පියනකින් වෑංකිය වසා ඇත. පියන AB ඔස්සේ නිදහස් ලෙස අසවකර ඇති අතර CD හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය වන E ලක්ෂ්‍යයේ දී සවිකර ඇත.

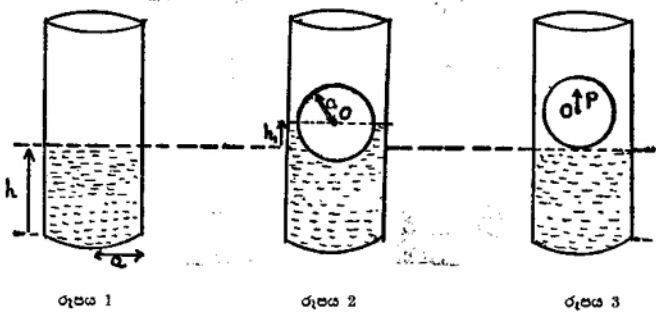
- (i) වෑංකිය ස්වකීය $ABCD$ පියන තිරස්ව සහ පහළින්ම පිටින සේ තබා ඇත්නම් E හි දී ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න.
- (ii) වෑංකිය AB තිරස්ව සහ පියන පිරස්ව (AB ට පහළින් CD) පිටින සේ තබා ඇත්නම් E හි දී ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න.

11. අරය a වන සැහැල්ලු සංවෘත අර්ධ වෘත්තාකාර පාත්‍රයක් සම්පූර්ණ ලෙස සන්නත්වය ρ වන සමජාතීය ද්‍රවයකින් පුරවා ඇත. එය ස්වකීය වෘත්තාකාර දූරයේ, ලක්ෂ්‍යයකින් නිදහස් ලෙස එල්ලා ඇත. එහි තල මුහුණත පිරස්ව

$\tan^{-1} \left(\frac{8}{\sqrt{73}} \right)$ කෝණයකින් ආනත වන බව ද ස්වකීය වෘත්තාකාර මුහුණත මත සම්ප්‍රයුක්ත කෙරවුම $\frac{8}{\sqrt{73}} \pi a^3 \rho g$ විශාලත්වයෙන් යුත් බලයක් බව ද පෙන්වන්න.

ද්‍රවයේ සමතුලිතතාව සැලකීමෙන් හෝ අන් අයුරකින් හෝ මෙම බලයේ ක්‍රියා රේඛාව තල මුහුණතේ කේන්ද්‍රය වන O සිට $\frac{a}{2}$ දුරකින් පිහිටි බව පෙන්වන්න.
ද්‍රවයේ වැඩිතම පීඩනය කුමක් ද?

12.



අරය a වන සිලින්ඩරාකාර සරාවක් (රූපය 1) $h (> \frac{1}{3} a)$ උසකට සන්නත්වය ρ වන සමජාතීය ද්‍රවයකින් පුරවා ඇත. ඈතා යක්ෂි මට්ටම පතුල ලෙස හෙත ඒ අනුබද්ධයෙන් ද්‍රවයේ විභව ශක්තිය

$$\frac{1}{2} \pi a^2 h^2 \rho g \quad \text{බව පෙන්වන්න.}$$

සරාව තුළට දමන ලද අරය a වන ඒකාකාර සන හෝලයක් (රූපය 2) ස්වකීය වක්‍ර සාෂ්ඨයෙන් අධික් ද්‍රවයෙන් ඉහළ පිටින සේ ඉපිලෙයි. $h_1 = \frac{2}{3} a$ මගින් දෙනු ලබන h_1 උසකින් ද්‍රව මට්ටම ඉහළ නැගී බව පෙන්වන්න.

ද්‍රවයේ විභව ශක්තියේ වැඩිවීම $\frac{\pi a^4}{36} \rho g$ බව පෙන්වන්න.

හෝලයේ m ස්කන්ධය සොයා එය ද්‍රවයෙන් යන්තමින් ඉවත්ව යන සේ (රූපය 3) එසවීමේ දී කෙරෙන කායභ් $\frac{7}{24} m g a$ බව පෙන්වන්න.